初中平面几何课程内容改革探析

071001 河北农业大学理学院 张彦蕊 100875 北京师范大学教科所 綦春霞

几何课程一直是历次中学数学教育改革的焦点. 中学数学是各国中学课程中相对比较统一的一门学科, 但几何课程则是中学数学中最不统一的一部分. 由国际教育成就评价协会(IEA)发起的第二次国际数学调查表明: 代数和算术课程各国是基本统一的, 但几何教学内容却有很大差别. 几何的核心内容很少, 只涉及平面几何的基础知识和坐标的简单应用. 只有部分国家还在讲欧氏几何的传统课题如全等和相似, 立体几何则强调得更少了. 几何内容的改革, 之所以是历次数学教育改革的焦点, 最根本的问题是对欧几里得几何的处理问题. 事实上, 20世纪以后, 特别是"新数"运动以后, 欧氏几何一统天下的局面已经消失了, 取而代之的是形形色色的多样化几何, 如直观几何、变换几何、论证几何、射影几何、解析几何. 这是几何课程改革的新趋向.

然而, 我国传统的几何内容依然只是单一的欧氏几何. 随着时代的推进, 演绎的、形式化的、单一的欧氏几何已不能满足社会发展和学生认知的需求, 几何学不再是只服从公理化的演绎, 单一的欧氏几何被多样化的几何取代是社会发展的必然. 荷兰数学教育家弗赖登塔尔说过: "要想以强化几何的演绎结构来拯救传统几何是注定要失败的." 几何是初中生最敏感的内容之一. 调查表明, 中学几何是引起学生强烈情感体验的重要内容, 几何是一部分学生(约占30%)最喜欢, 且能给其带来快乐的学习材料, 但也是一部分学生最不喜欢的内容. "平面几何证明"是一把双刃剑, 一方面, 许多神奇多变的论证方式和赏心悦目的结论使一些学生流连忘返, 从此喜欢上数学, 并走上从事数学研究的道路; 但另一方面, 我们也看到, 过分复杂、繁琐的论证使得20% ~ 30%的初中生厌恶数学, 远离数学, 丧失了学习数学的信心. 因此, 我们必须重新审视平面几何.

我们知道初中阶段几何课程的首要目标是使学生更好地理解赖以生存的空间, 发展学生的空间观念与几何直觉. 同时通过对图形基本性质的探索和证明, 发展学生的合情推理能力和演绎推理能力, 使他们理解证明的意义和过程, 体会推理和证明的力量. 就内容来说, 新教材在原来欧氏几何的基础上, 删减了那些繁、难、偏、旧, 与社会需要不相适应, 与科技发展距离较远, 过分强调技巧的内容, 增加了直观几何、变换几何、解析几何、实验几何、射影几何, 下面分别给予具体地介绍.

一、实验几何及其特点

实验几何是一种非演绎的几何, 它摆脱了欧氏几何的那种环环相扣的逻辑体系和严密抽象的演绎推理形式, 而以实验操作的方法和类比归纳的思维方式来建立空间与平面的各种位置和数量关系, 以创造活动为其主要教学形式. 概括起来, 实验几何有如下特点.

1. 贴近人类的生活空间和日常经验

实验几何是欧氏几何之源泉. 早在欧几里得时代之前, 中国、古埃及和巴比伦就已经在生产劳动中用实验的方法积累了大量的几何事实. 如我国的《周髀算经》中的弦图，就给出了勾股定理的与欧几里得完全不同的非演绎的、也是最省力的证明. 古希腊文明是在继承了古埃及和巴比伦的实验几何的基础上, 运用逻辑的方法, 建立起高度系统化的演绎几何体系. 实验几何降低了对论证技巧的要求, 强调不同水平的创造活动. 几何论证有两重效果. 一方面, 使热爱数学的学生领略了数学的

奥秘, 从此走上数学研究的道路; 另一方面, 也使一些学生对数学望而生畏. 几何论证的高度技巧性是造成学生两极分化的症结. 实验几何则可以为不同智力水平的人提供不同要求的活动, 并能使所有的学生都能从这些活动中尝到成功的快乐, 在这一点上, 实验几何符合大众数学的思想.

2. 实验几何注重对学生观察能力、实验能力、创造力及归纳类比能力的培养

实验几何改变了以往数学那种枯燥乏味的形象, 变几何学习为一种趣味活动, 而这些活动对培养学生的观察能力、实验能力、创造能力及归纳类比能力有很大的促进作用.

综上所述, 基于实验几何的这些特点, 许多人都主张重视实验几何的教学. 处理的方案有: (1) 将实验几何作为欧氏几何的前奏; (2) 在欧氏几何中部分地运用实验几何的方法; (3) 用实验几何取代欧氏几何的演绎过程. 尽管"欧氏几何滚蛋"的口号余音未绝, 也确实有些国家已不再要求大多数学生学习几何证明, 但第三种方案还是有些偏激. 欧氏几何毕竟有它独特的教育价值, 不能全盘否定. 因此, 数学界的大部分人提倡前两种方案, 也有些主张两者兼而有之, 即一方面在低年级或小学阶段学习实验几何, 另一方面在中学高年级的演绎几何中加强实验几何的成分, 这样既实现了实验几何的实用性、趣味性和创造性, 又加强了学生演绎推理能力的培养, 突出了对学生双基的培养.

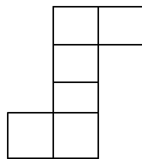
下面以义务教育课程标准实验教科书七年级上册(北京师范大学出版社) 中的案例作简要地分析.

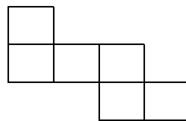
例1　将一个正方体的表面沿某些棱展开, 展成一个平面图形, 回答下列问题.

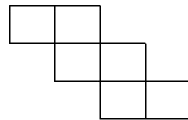
(1) 你能得到哪些平面图形? 与同伴进行交流;

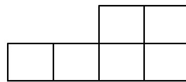
(2) 你能设法得到如图1、2所示的平面图形吗?

(3) 如图3、4所示的图形能否围成一个正方体的表面?


图 1


图 2


图 3


图 4

对问题 (1), 应鼓励学生充分实践, 并在全班展示他们的作品. 还应引导学生回顾并尽可能用语言描述自己是如何将一个正方体的表面展成平面图形的, 以发展他们的空间观念和语言表达能力. 对问题 (2), 应首先鼓励学生想象, 并尝试动手操作. 操作过程中, 可以引发学生思考:"你是如何剪的?" "这样剪行吗?" "下一步怎么办?", 鼓励他们将操作与思考结合起来. 对于问题 (3), 不妨采取先想象, 后操作, 再回顾操作过程的形式. 总之, 三个问题的讨论都应将学生充分地实践和实践中的思考与交流有机地结合起来.

二、论证几何及其对我国几何课程改革的影响

1. 论证几何及其意义

《几何原本》最突出的特征是逻辑论证, 而欧氏几何正是沿用了这一体系, 几何论证对培养学生严密的推理能力和严谨的思维方式起着不可磨灭的作用. 波利亚曾对"为什么要进行几何证明"的问题作过如下回答: "如果一个学生不了解这个或那个特殊的事实, 并不要紧, 因为在他以后的生活中, 也许很少用到这些事实, 但是, 如果他没有学会几何证明, 他就没有学到真实的论据的最好和最简单的例子, 也错过了获得严格推理概念的最好机会." 我国数学家王元院士也说:"几何的学习不是说学完了这些知识有什么用, 而是针对它的逻辑推导能力和严密的证明, 而这一点对一个人成为科学家, 甚至成为社会上素质很好的公民都是非常重要的, 而这个能力若能在中学里得到训练, 会终身受益无穷." 因此, 几何的精髓在"论证"而不在知识. "新数学"想用更有用的生产、生

活中的知识及现代数学中的一些内容,取代所谓"古老无用"的平面几何,结果以失败而告终.事实上,数学的有用或无用,不能仅仅看它能否在现实生活中得到直接应用,更主要的是看它在能力培养上提供的智力价值.

论证几何对学生的数学学习带来了双重影响.一方面,使那些酷爱数学的学生更喜欢上了数学,从此走上了科学研究的道路;另一方面,也使一些学生对数学望而生畏,厌恶数学,乃至失去了对学校教育的信心.对这种情况的出现,我们应一分为二地看.一方面,我国的基础教育,包括几何教育水平在国际上还是享有较高声望的,取得了举世瞩目的成绩;另一方面,也存在着一些问题,如以前的教材把几何与演绎体系等同起来,教材内容过于繁杂,在教材的编排和内容上,直观背景材料提供得不够,使学生觉得几何离生活太远;再有,对几何论证教育价值的理解也失之偏颇.有些教师和学生片面地为教证明而学证明,几何论证的教育价值在于通过证明的教与学使学生理解相关的几何知识,进而培养学生的理性思维能力,以此来帮助学生寻找新旧知识的内在联系,使学生获得系统化的知识,并尽可能让学生自己去发现新知识.另外还要注重观察、实验、归纳、类比、猜想等合情推理在几何论证中的地位与作用.

2. 几何课程改革的关键——直观几何和论证几何的统一

我国当前的几何课程改革应把直观几何和论证几何统一起来,生动直观的图形和严谨的逻辑结构有利于充分调动学生左右脑的潜力,增加学习效率,全面培养学生的能力(包括直觉能力、形象思维能力和逻辑思维能力).

几何课程应加强几何直观与逻辑推理的联系.在低年级阶段,运用大量的图形和直观,培养学生的直觉能力和空间想象能力;在较高年级阶段,逐步增加论证几何的内容,培养学生的演绎推理能力,使学生养成推理严谨、言必有据的思维习惯.这两个过程是相辅相成的.当然,在具体实践过程中,肯定会遇到许多困难,这就要求广大数学教育工作者、一线教师结合实际、创造性地开展工作.正如ICMI在1998年的研究丛书的前言中指出:"在制订中学几何课程时,我们必须作出选择,历史上的各种课程试验,往往由于偏重于某个特征而忽略了其他特征,至今没有一个成功的例子.特别的经验表明,不可能跳过早期的直觉阶段,而把几何教学局限于形式的、代数的特征.当然,另一方面也没有理由忽视形式的几何,它曾经,今天仍然,今后也将是严格演绎推理的模式.同样,也不能忽视它的代数特征,它是进一步学习的最有效的途径.关键是找到平衡点,但不可能是单一的途径."

下面举例说明.本例取自义务教育课程标准实验教科书七年级下册(北京师范大学出版社).

例2 如图5,有两个长度相同的滑梯,左边滑梯的高度AC与右边滑梯水平方向的长度DF相等,两个滑梯的倾斜角$\angle ABC$和$\angle DFE$的大小有什么关系?

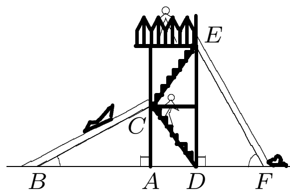


图 5

下面是三个同学的思考过程.

在Rt$\triangle ABC$和Rt$\triangle DEF$中,$BC=EF$,$AC=DF \Longrightarrow \triangle ABC \cong \triangle DEF \Longrightarrow \angle ABC = \angle DEF \Longrightarrow \angle ABC + \angle DFE = 90^\circ$.

有一条直角边和斜边对应相等,所以$\triangle ABC$与$\triangle DEF$全等.这样$\angle ABC = \angle DEF$,也就是$\angle ABC + \angle DFE = 90^\circ$.

在Rt$\triangle ABC$和Rt$\triangle DEF$中,$BC = EF$,$AC = DF$,因此这两个三角形是全等的,这样,$\angle ABC = \angle DEF$,

(下转第12–41页)

墨子命题可以取代平行公理

121003 辽宁省锦州渤海大学数学系 纪 明

本文证明了中国的墨子命题与平行公理的等价性. 并给出墨子命题可以取代平行公理的几点理由.

《墨经》中的"经上"一文载有命题:"平, 同高也." 这个命题在平面几何中可译为: 平行直线, 处处等距. 简称墨子命题.

平行公理为: 在同一平面内, 过已知直线外任意一点, 平行于已知直线的直线有且只有一条.

现在证明墨子命题与平行公理等价.

证明: (由墨子命题证明平行公理)

设点A在直线a外, 作$AH\perp a$, 若$AB/\!/a$且$AC/\!/a$, 不妨设射线AC在$\angle HAB$内部.

作$BD\perp a$, 由巴士公理(巴士(公元1843–1930年)德国数学家. 巴士公理: 设三点A、B、C不共线, 直线a在平面ABC上, 且不过A、B、C三点中任意一个. 若a与线段AB、BC、CA中之一相交, 则a必与且仅与另一相交), 则AC必通过BH上一点而交BD于一点E. 得$ED<BD$, 但据墨子命题, 又得$ED=AH=BD$, 矛盾.

这就证明了平行公理.

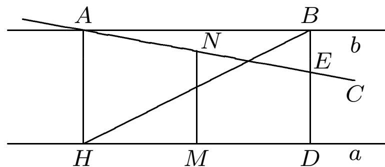


图 1

(由平行公理证明墨子命题)

设$AB/\!/a$, A和B为直线b上任意两点, $AH\perp a$, $BD\perp a$, 假若$BD\neq AH$, 不妨设$BD>AH$, 在BD上取$DE=AH$, 则$AHDE$为沙开里四角形(沙开里(公元1667–1773年)意大利数学家. 沙开里四角形: 两腰相等又都垂直于下底的四边形). 其下底HD的中垂线MN必垂直于上底AE, 于是又有$AE/\!/a$, 这与平行公理相对立.

这就证明了墨子命题.

墨子命题可以取代平行公理的理由:

1. 墨子命题与平行公理等价.

2. 墨子命题简明易懂, 与中学生对矩形对边相等的认识相一致, 而平行公理中的"至多"或"唯一"或"仅有一"是不容易被中学生所接受的.

3. 墨子命题取代平行公理, 使得重合两直线间与无公共点两直线间, 具有明显的共性"处处等距", 于是可以把重合直线也定义为平行直线, 使平行成为等价关系, 以便于在平移、位似、向量、解析几何、投影几何和制图学中的应用.

4. 既然作为中学教材, 不必也不可能严格执行公理法的独立性原则, 那么现在可以认为墨子命题包含两个互逆都真的命题, 以便学和用.

如果认为平行公理作为定理在证明上有困难, 那么也可以和墨子命题都作为公理提出. 到了学习立体几何时还可以把"平行平面, 处处等距"及"平行直线与平面间处处等距"作为公理提出.

5. 学了线段和角之后, 紧接着不仅用角还用线段去研究平行线. 学习平行线一开始就提出有关距离这样一个重要性质, 而不是隔着三角形到了平行四边形时才提出来.

6. 把墨子命题作为公理提出来, 便于使学生认识公理来源于实践并且是长期逻辑加工的结果, 又便于对学生进行爱国主义思想教育.

对高中生“惯性学习”方式的调查分析

311800 浙江省诸暨中学 张小明

笔者在教学实践中发现, 部分学生的学习“重结果、轻过程”, 对解题模式和解题程序的积累重视有加, 而对隐含于解题程序后面的数学思考“不太感兴趣”, R. Skemp将这种低层次的学习活动称之为“惯性学习”[1], 所谓“惯性学习”是指学生的学习发生在动作之后, 往往是先掌握行动或操作的规则和程序, 而后对动作造成的结果不断地强化, 这种学习中认知的成分较少. 如果学生的学习以惯性学习为主, 不但课程目标难以实现, 甚至学生的创造性也会逐渐泯灭.

那么, 在学生实际学习活动中, 惯性学习方式在多大程度上影响着学生的数学学习效果? 造成部分学生过分依赖惯性学习方式的原因是什么? 本文对520名高一学生求解无理不等式时采用的解题策略进行了调查, 结果发现“模式识别”策略的负面影响导致了解题错误的出现, 而“惯性学习”方式是学生普遍采用这一策略的直接原因.

1. 调查

无理不等式是高中数学中的一个重要的内容, 对于无理不等式的求解, 通常总结为以下的规则:

$$\sqrt{A(x)} \leqslant B(x) \Longrightarrow \begin{cases} A(x) \geqslant 0, \\ B(x) \geqslant 0, \\ A(x) \leqslant [B(x)]^2. \end{cases}$$

$$\sqrt{A(x)} \geqslant B(x) \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} A(x) \geqslant 0, \\ B(x) < 0, \end{cases} \text{或} \begin{cases} B(x) \geqslant 0, \\ A(x) \geqslant [B(x)]^2. \end{cases}$$

其他的无理不等式一般都可以转化为以上的基本形式加以解决. 首先, 我们强调的是, 虽然这个模式具有普遍性的一般意义, 但对于有些无理不等式来说, 这个规则并不是必须的, 甚至有时是不利的. 例如: $\sqrt{x}+2 \leqslant 0$, 如果要用以上规则来解, 就需要经历以下的过程:

$$\sqrt{x}+2 \leqslant 0 \Longrightarrow \sqrt{x} \leqslant -2$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0, \\ -2 \geqslant 0, \\ x \leqslant (-2)^2. \end{cases}$$

事实上, 我们并不需要以上的繁复的过程, 只要根据根式的性质就可以得到结果.

根据本文的研究目的, 我们关心的是学生在解无理不等式的过程中, 对以上的一般性规则的依赖程度如何? 课堂上总结出的一般性解题规则对学生的解题活动有何影响? 当外在条件改变时, 学生能否跳出常规思维的圈子, 而以智慧学习[1]思考问题? 根据以上目的, 我们的问卷由下列题目构成:

已知$x \in \mathbf{R}$, 解下列无理不等式:

(1) $\sqrt{x} \leqslant 6-x$;　　(2) $\sqrt{x-1} \geqslant 1-x$;

(3) $\sqrt{x} \leqslant 1$;　　(4) $\sqrt{x} \geqslant 0$;

(5) $\sqrt{x} \leqslant -1$;　　(6) $\sqrt{-x} \geqslant 0$.

(时间20分钟, 采用闭卷的形式, 不能使用计算器)

其中, 前两道题目需要根据以上的规则解答; 第三道题目可以利用规则解决, 也可以利用其他方法(如平方)解决, 后面的三道题若要用一般的规则来解决, 则是将简单问题复杂化, 从这个意义上来说, 采用一般性规则其实是不利于解题的.

为了探寻学生解题错误以及过分依赖解题规则的真正原因, 在测试完成后, 我们又对30名学生进行了访谈, 访谈主要关注以下几个问题:

- 你解题错误的主要原因是什么?

•在解无理不等式的过程中,你想过用老师总结的一般规则吗? 为什么?

•你怎样看老师课堂上总结的解题模式?

参与本次研究的520名学生均为浙江省重点高中的高一学生, 所有的被试均已学过无理不等式的解法, 而且, 通过访谈任课老师得知, 所有参与研究的学生都在课堂上得到了老师传授给的前文所述的一般性规则.

2. 调查结果

问卷答题正确率统计如下表:

学生答题情况统计

解答 \ 题目	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
正确	340人 (66%)	300人 (58%)	360人 (69%)	310人 (60%)	310人 (60%)	320人 (61%)
解答不完全	70人 (13%)	80人 (15%)	40人 (8%)	10人 (2%)	30人 (6%)	10人 (2%)
错误	90人 (17%)	100人 (19%)	100人 (19%)	190人 (36%)	100人 (19%)	160人 (31%)
没有回答	20人 (4%)	40人 (8%)	20人 (4%)	10人 (2%)	80人 (15%)	30人 (6%)

从问卷测试的结果可以看出, 对于问题(1)、(2)、(3), 正确或思路正确但解答不完全的有1190人, 占总人数的76%; 不正确或没有解答的人数为370人, 占总人数的24%.

对于问题(4)、(5)、(6)而言, 虽然根据二次根式的性质, 几乎可以直接写出正确答案, 但是测试的结果却不尽人意, 解答正确或思路正确但解答不完全的有990人, 占总人数的63%, 不正确或没有解答的人数为570人, 占总人数的37%, 远远高于前三题的错误率. 从解题的过程来看, 学生对于前三道题目, 基本上能用老师教给的基本规则进行解答, 解答过程中的错误, 很大一部分是由于计算或笔误造成的. 但对于后三道题目, 很多学生产生了很多的困难, 尤其是利用一般规则解题的同学, 发生错误的比例更高.

解题策略选择情况统计表
(百分比不包含无解答的人数)

第(1)(2)题		第(3)题		第(4)(5)(6)题	
应用规则 (91%)	其他策略 (9%)	应用规则 (72%)	其他策略 (28%)	应用规则 (68%)	其他策略 (32%)

从解题策略的选择来看, 大多数学生对一般性规律的依赖是比较明显的, 尤其是最后三道题, 根本不需要利用一般规则"将简单问题复杂化", 但是采用一般性规则解题的学生竟然占到了68%.

对学生解题错误的原因的访谈, 有以下几个具有代表性的回答:

•我将解无理不等式的规则记错了, 所以题目做错了, 以后一定要加强复习、记忆!

•由于没有及时复习, 老师讲过的无理不等式的方法(规则)我忘记了, 于是就根据自己的理解去做, 不出错才怪呢!

•老师上课总结的一般规则应该是最重要的内容吧, 首先这些东西在解题的时候很有用, 其次, 在考试的时候, 老师总是按照一般规则制定评分标准, 那肯定要按规则行事了.

•当然应当按照老师总结的规则来解题了, 况且, 这些规则是很有用的, 您说不是吗? (反问笔者).

•老师上课总结的解题模式总是很有用的, 所以我认为听课过程中, 最重要的就是记住这些模式, 考试的时候, 复习一下, 一般来说, 得个好成绩还是不成问题的.

3. 研究结论

(1) 学生对解题模式或一般性解题规则依赖过强

测试的结果表明, 对于适合用一般性解题模式解答的测试题(1)、(2)、(3), 学生表现出了较高的解题水平, 而对于后面的三道测试题而言, 由于不适宜用解题模式解答, 所以学生成功率就大打折扣.

在学生的学习过程中, 所积累的经验经过加工, 会得出有长久保存价值或基本重要性的典型结构与重要类型——模式, 将其有意义地记忆下来, 并作有目的的简单编码. 当遇到新的问题时, 我们可以辨认它属于哪一类基本模式, 联想起一个已经解决的问题, 以此为索引, 在记忆的贮存中提出相应的方法来加以解决, 这就是模式识别的解题策略. 这一策略体现了化归的思想.

根据调查结果我们发现, 多数学生对模式识别的策略过于强化, 甚至将解题思维僵化,

对于他们来说, 解题的思维过程几乎是机械化的:

明确问题 ⟶ 模式识别 ⟶ 寻找规则 ⟶ 利用规则 ⟶ 问题求解.

(2) *很多学生的学习停留在"惯性学习"水平*

通过对30名学生的访谈, 笔者了解到很多学生的学习方式以"惯性学习"为主, 在课堂上, 他们最重视解题模式的积累, 甚至对老师如何得到这些规则的分析过程"不感兴趣", 对这些学生来说, 他们最想知道的是"怎样做?", 而对于"为什么这样做"却得不到应有的重视, 至于对规则的理解, 他们是"理解也要执行, 不理解也要执行, 在执行中加深理解", 如此一来, 当问题的情境发生变化时, 他们往往一筹莫展, 解题错误率明显上升.

(3) *教学过程中过度强调模式化助长了"惯性学习"的不良倾向*

模式识别策略是解题活动最重要的策略之一, 积累一定的解题经验, 总结必要的解题模式是提高解题能力的必要条件, 但是在教学实践中, 有些老师过分强调模式化, 将数学问题归纳成很多"类型", 然后对每一种"类型"都总结出一定的解题规则, 而对于隐含于模式背后的数学思想却重视不够, 似乎学生只要掌握了这些规则, 便能在解决问题时"有法可依", 这种做法在一定程度上助长了学生"惯性学习"的不良倾向.

另一方面, 在平时的教学测试中, 老师提供的试题往往只涉及课堂上总结出的"类型", 这样一来, 学生只要对平时掌握的解题模式加以复习, 就能在考试中立于不败之地, 这种做法又一次增强了学生对"解题模式"的依赖性, 也进一步助长了学生"惯性学习"的不良倾向.

4. 结束语

正如《学会生存》一书中指出的那样, 教育具有培养创造精神和压抑创造精神的双重力量. 也就是好的教育能够充分施展培育创新的力量, 提升受教育者的创新素养, 而不当教育可能构成对创新的打击与窒息.

"解题模式"在数学教学中同样也是集保守与创新于一体. 这就需要我们在利用这些"解题模式"时, 要注意这些模式的双重身份, 切忌生搬硬套, 过分强调模式化, 只有这样, 学生的学习才不至于陷于"惯性学习"的泥潭, 而对于已经习惯于"惯性学习"方式的学生来说, 则需要老师对他们进行学法指导, 帮助他们逐步走向"智慧学习".

参考文献

[1] Skemp. R. R. 数学学习心理学. 台北: 九章出版社. 1987.

[2] Bagni. G. T. Irrational inequalities learning and didactical contract. In. Gagatsis. A.& Rogers. L.(eds.). Didactics and History of Mathematics. Erasmus. Thessaloniki: 1996,133-140.

[3] 徐斌艳. 数学课程与教学论. 浙江教育出版社. 2003.

[4] 数学课程标准研制组. 数学课程标准解读. 北京师范大学出版社. 2003.

(上接第12–11页)

这样的问题设计, 自然将学生带到用函数图象法来近似解二元一次方程组. 同时, 渗透了"函数建模"的思想和"数形结合"的思想. 培养学生用数学的眼光、数学的头脑来观察分析身边世界的能力.

这样的研教一课, 将使教师受益多多. 教学案例透视是我校教师校本培训的重要形式之一, 我们在研究教学案例的过程中, 逐步形成了"自我反思"、"同伴互助"、"专业引领"三位一体的研究模式. 师徒"同备"、"同研"、"同教"同课时, 备课组其他成员共同参与, 是我校三位一体案例研究模式的具体实践. 师徒"传、帮、带"作用, 实现资源共享, 不仅促进青年教师成长, 使所有参与研究的教师从中受益, 而且是一条改变学校面貌、转变教师教学观念、提高教师教育教学研究水平的十分有效的途径之一.

深化区别与联系、强化沟通与互译

——《概率初步》教学后的反思

200240 上海市闵行中学 魏世磊 201100 上海市闵行区教师进修学院 颛孙长宗

上海市"二期课改"高三《数学》(理科) 试验教材, 第20章《概率初步》较"一期课改"教材增加了两节内容. 其一是概率的性质和加法公式; 其二为独立随机事件. 教学初期, 依据"一期课改"的教学经验, 原以为即使增加了这两节内容, 但毕竟还是概率初步, 教学中不会遇到太大的问题, 但教学的实践表明, 我们的判断与教学的实际还是有一定的距离, 以下四例来自学生的错误解答, 具体解答、点评, 列表如下.

序号	题目	错误解法	错误率	点评
1	从装有2个红球和2个白球的口袋内任取2个球, 那么互斥而不对立的两个事件是 ……………………( ) (A) 至少有1个白球与都是白球; (B) 至少有1个白球与至少有1个红球; (C) 恰有1个白球与恰有2个白球; (D) 至少有1个白球与都是红球.	误选 (D).	一个班有35%的同学误选.	误选原因: 互不相容事件与对立事件的区别与联系搞不准确. 选择支 (D) 是互不相容事件, 也是对立事件, 正确答案是 (C).
2	甲、乙两人参加普法知识竞答, 共有 10 个不同的题目, 其中选择题6个, 判断题4个, 甲、乙两人依次各抽一题. 甲抽到选择题, 乙抽到判断题的概率是多少?	设甲抽到选择题为事件 A, 乙抽到判断题为事件 B, 则 $P(A)=\dfrac{C_6^1}{C_{10}^1}=\dfrac{3}{5}$, $P(B)=\dfrac{C_4^1}{C_{10}^1}=\dfrac{2}{5}$, $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\dfrac{3}{5}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{6}{25}$.	出错率38%.	独立事件的概念理解不透彻, 事实上甲抽到选择题与否对乙抽到判断题的概率是有影响的, A、B 不互相独立, 正确答案为 $P=\dfrac{C_6^1C_4^1}{P_{10}^2}=\dfrac{4}{15}$.
3	盒中有四个球, 其中两个红球, 一个黄球, 一个白球, 每次任取一个, 有放回地抽取三次. 设 $G=$"无红", $H=$"无黄". 求事件 $L=$"无红或无黄"的概率?	由概率的加法公式得: $P(L)=P(G\cup H)=P(G)+P(H)=\dfrac{2^3}{4^3}+\dfrac{3^3}{4^3}=\dfrac{35}{64}$.	出错率27%.	对于概率加法公式使用的条件含糊不清, 事实上 G 与 H 并非不相容. 正确解法为: $P(L)=P(G\cup H)=P(G)+P(H)-P(GH)=\dfrac{2^3}{4^3}+\dfrac{3^3}{4^3}-\dfrac{1}{4^3}=\dfrac{17}{32}$.
4	在一段时间内, 甲去某地的概率是 $\dfrac{1}{4}$, 乙去此地的概率是 $\dfrac{1}{5}$, 假定两人的行动相互之间没有影响, 求在这段时间内至少有1人去此地的概率?	设甲去某地的事件为 A,则 $P(A)=\dfrac{1}{4}$, 乙去某地的事件为 B, 则 $P(B)=\dfrac{1}{5}$, 由互不相容事件和的概率加法公式: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}=\dfrac{9}{20}$.	出错率21%.	对于独立事件与和事件之间的区别与联系把握不准. 错将"假定两人的行动相互之间没有影响"判断为两者是互不相容事件. 正确解答为: $P=1-P(\overline{A}\,\overline{B})=1-P(\overline{A})P(\overline{B})=1-[1-P(A)][1-P(B)]=1-\dfrac{3}{4}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{2}{5}$.

鉴于以上情形, 笔者认为: 在教学中, 如下两方面问题应当给予足够的重视.

一、注重深化概念的区别与联系

《概率初步》这一章出现了很多事件. 如: 必然事件、不可能事件、随机事件、互不相容事件、相容事件、对立事件、和事件、积事件、独立随机事件. 这些事件之间的区别与联系既是教学的重点又是难点, 学生在学习中因搞不清它们之间的区别与联系, 是导致错误发生的重要原因之一. 以下三个问题更容易混淆不清.

1. 对立事件与互不相容事件的区别与联系

① 对立事件一定不相容, 但不相容未必对立. 即互不相容事件是对立事件的必要条件, 对立事件是互不相容事件的充分条件;

② 不相容事件适用于多个事件, 但对立事件仅适用于两个事件;

③ 不相容事件表明两个事件不能同时发生, 至多只能一个发生, 但可以都不发生, 而对立事件表明两个事件有且仅有一个发生.

2. 互相独立事件与互不相容、相容事件之间的区别与联系

就独立事件而言, 它有如下特征:

① 研究两个事件之间的关系;

② 所研究的两个事件从两次实验而得到;

③ 两个事件独立是指, 一个事件的发生对另一个事件的发生的概率没有影响.

它与互不相容事件的区别与联系为: 互不相容事件是指同一次实验不能同时发生; 两个事件独立是指在不同实验下, 两者互不影响. 两个相互独立事件并不一定互不相容, 即可能同时发生; 而互不相容事件则不可能同时发生. 为加深对独立事件的理解, 我们通过实例, 让学生在辨析中弄清它们的区别与联系, 收到不错的效果.

例 一个口袋内装有2个白球和2个黑球, 把“从中任意摸出一个球, 得到白球”记做事件A, 把“从剩下的3个球中任意摸出一个球, 得到白球”记做事件B. 那么, 在先摸出白球后, 再摸出白球的概率是多少? 在先摸出黑球后, 再摸出白球的概率是多少? 这里事件A与事件B是相互独立的吗?

因为前者的概率是$\frac{1}{3}$, 后者的概率是$\frac{2}{3}$. 这就是说, 事件A发生与否对事件B的发生的概率有影响. 因此, 事件A与B不相互独立.

3. 概率加法公式适用的范围与条件

概率的加法公式有两种形式:

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\cdots\cdots$(I)

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$(II)

何时使用公式(I)或(II), 虽然教材中也作了明确的说明, 当$AB\neq\varnothing$时, 使用(I); 当$AB=\varnothing$时, 使用(II). 但若要学生们能真正准确地使用公式(I)、(II), 最好还是通过一些反例来辨析. 再一个问题是, 学生对于概率的加法公式的另一个困惑是: 对于独立事件而言, 公式(I)是否适用呢? 这里的回答是肯定的, 教材里P.95. 例1的第(2)小题, P.98. 例5的第(2)小题就足以说明这一点.

二、应加大集合语言与事件间关系互译的力度

由于事件是借助集合运算来实现的, 如果事件不能准确地翻译成集合语言, 那么解答概率问题的正确性就可想而知了. 因此事件与集合语言之间的互译就成为本章教学的另一个重点或者难点了, 教材中虽然也出现了这方面的例题、习题, 如P.90. 例3, P.91. 练习1第(1)小题, 但无论例题还是习题, 起点都比较高, 不易被学生理解、掌握. 教学中, 我们做了如下铺垫和补充.

1. 事件的集合语言表示

序号	事件的文字语言表述	事件关系的集合表示
1	事件A发生必然导致事件B发生	$A\subset B$
2	事件A与事件B相等	$A=B$
3	事件A与事件B至少一个发生(和事件)	$A\cup B$, $(A+B)$
4	事件A与事件B同时发生(积事件)	$A\cap B$, (AB)
5	事件A不发生	$\overline{A}$, (A')
6	事件A发生而事件B不发生	$A\overline{B}$, (AB')
7	事件A与事件B不相容(互斥)	$A\cap B=\varnothing$
8	事件A与事件B互为对立事件	$A\cap B=\varnothing$, $A\cup B=\Omega$

2. 事件与集合语言间的互译

就事件与集合的语言互译而言, 我们是从两个方面着手.

其一是由事件→集合语言→文字语言的翻译. 这其中翻译与表述的过程, 实际上是对问题理解、抽象的过程, 对于概率的学习不但必要而且十分有益. 如:

例 设袋内有10个编号为$1\sim10$的球, 从中任取一个, 观察其号码. 若事件A表示“取得球的号码是奇数”; 事件B表示“取得球的号码

是偶数"; 事件C表示"取得球的号码为小于5的数", 口述下列事件的涵义:

(1) $A\cup B$;　　(2) AB;

(3) $\overline{C}$;　　(4) $\overline{A}\,\overline{C}$;

(5) $\overline{BC}$;　　(6) $\overline{B\cup C}$.

译: 若对1 ～ 10号球进行编号, 分别为$\{W_1, W_2, \cdots, W_{10}\}$.

(1) $A\cup B$表示取得球的号码是奇数或偶数的事件(即奇数、偶数必有一个发生的事件), 此事件是必然事件;

(2) AB表示奇数、偶数同时出现, 它是不可能事件;

(3) $\overline{C}$表示C的对立事件, 即大于或等于5的号码, $\overline{C}=\{W_6, W_7, W_8, W_9, W_{10}\}$;

(4) $\overline{A}\,\overline{C}$表示大于或等于5的、偶数同时出现, $\overline{A}\,\overline{C}=\{W_6, W_8, W_{10}\}$;

(5) $\overline{BC}=\overline{B}\cup\overline{C}=\{W_1, W_3, W_5, W_6, W_7, W_8, W_9, W_{10}\}$, 即表示奇数或者大于等于5而小于或等于10的数至少一个出现;

(6) $\overline{B\cup C}=\overline{B}\cap\overline{C}=\{W_5, W_7, W_9\}$, 表示大于4而小于10的奇数.

其二是事件(文字语言)→集合语言的互译与表述.

这方面的问题比较抽象, 有一定的难度, 但它是解决概率问题所必须具备的能力之一, 教师应当适当地点拨与诠释.

例　若A、B、C是三个事件, 试用集合符号表示下列各事件:

(1) A发生而B与C都不发生;

(2) A与B都发生而C不发生;

(3) A、B、C都发生;

(4) A、B、C中恰有一个发生;

(5) A、B、C中恰有两个发生;

(6) A、B、C中至少发生一个;

(7) A、B、C都不发生;

(8) A、B、C不同时发生;

(9) A、B、C中不多于一个发生.

译: (1) $A\overline{B}\,\overline{C}$;

(2) $AB\overline{C}$;

(3) ABC;

(4) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$;

(5) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$;

(6) $A\cup B\cup C$;

(7) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$ 或$\overline{A\cup B\cup C}$;

(8) $\overline{ABC}$或$\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$;

(9) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$.

3. 揭示串(并)联电路→集合语言表示→概率运算间的关系

教材中, 串并联电路作为概率在物理中的应用, 设计了多道练习题, 且难度均较大, 很多学生看到题目时, 根本不知从何入手. 教学中, 我们做了适当的介绍与补充, 从教学效果来看还是比较令人满意的.

设A、B、C、D各事件正常工作的概率为$P(A)$、$P(B)$、$P(C)$、$P(D)$, 则

类型		电路图	正常工作的概率
串联电路		—A—B—C—	$P=P(A\cap B\cap C)$
并联电路		A, B, C 并联	$P=P(A\cup B\cup C)$
混联电路	(I)	A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 并联	$P=P(A_1A_2\cup B_1B_2\cup C_1C_2)$
	(II)	D_1—(A, B, C 并联)—D_2	$P=P(D_1\cap(A\cup B\cup C)\cap D_2)$

～～

(上接第12–14页)

以独当一面.

虽然让学生"动"起来是新课程改革的一个方向, 但是"动"只是课堂的形式, 光动起来是远远不够的, 根本在于我们要带给学生充实的精神生活, 关键在于对数学本质的追求与探索; 教学也不是越动越好, "动"会导致"乱", 活而不乱、形散而神不散、动静有序才有课堂的规范. 总之, 教无定式、教无定法, 使学生的思维品质得到发展和提高才是我们需要追求的.

研教一课 受益多课

——师徒同教“八年级数学(下)实践与探索”

313100 浙江省长兴县古城中学 章新金 肖晓红

2005年3月29日, 本人听带教的肖老师上华师大版教材“八年级数学(下) 17.5实践与探索”一课，课后，就某教学片段与肖老师进行了深入的切磋和交流. 然后共同进行第二次备课, 由本人执教, 肖老师听课, 共同研究.

一、徒弟上课

教师出示问题1: 学校有一批复印任务, 原来由甲复印社承接, 按每100页40元计费. 现乙复印社表示: 若学校先按月付给一定数额的承包费, 则可按每100页15元收费. 两复印社每月收费情况如图1所示.

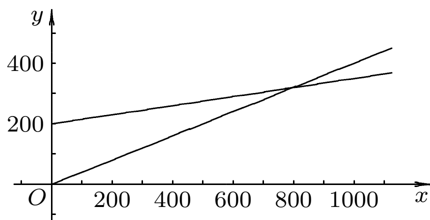


图 1

根据图象回答: (1) 乙复印社的每月承包费是多少?

(2) 当每月复印多少页时, 两复印社实际收费相同?

(3) 如果每月复印页数在1200页左右, 那么应选择哪个复印社?

讨论:

(1) 图象与坐标轴的交点及两图象交点有什么实际意义?

(2)“收费相同”在图象上怎样反映出来?

“在前面几堂课中, 我们已经学习了一次函数的图象和性质及其简单地应用, 你们能否回答教师提出的问题? 分小组讨论一下.” 学生分组讨论, 热情很高, 许多同学还用尺和笔在课本上画起来, 根据图象很快解决了所给的问题.

这时教师又向学生提出:“两个一次函数图象的‘交点’还有什么意义呢?”

学生感到很鄂然, 冷场片刻后, 教师又开始发话了“平时我们班, 上课气氛很活跃, 今天怎么啦! 是否有老师听课而感到害怕了?”

学生更是鸦雀无声!

过好几分钟后, 学生还是碰撞不出思维的火花.

这时老师只能自言其说:“两个一次函数图象的‘交点’, 还可以表示由这两个一次函数的关系式组成的方程组的解.” 然后老师出示以下例题:

例 利用图象解方程组 $\begin{cases} y = 2x - 5, \\ y = -x + 1. \end{cases}$

老师做示范, 先把该题的解题过程在黑板上演示一遍, 然后让学生模仿做书上的解方程的练习题.

我在学生中间巡视, 发现很多同学还是用代入法或加减法来解方程组, 并没有用图象法.

二、课后评析

课后, 我及时和肖老师进行了交流, 共同反思本堂课的教学得失.

首先肯定, 肖老师尚能抓住本节课的教学重点, 注重学生的主体作用的发挥, 关注学生的合作交流, 重视知识的应用. 但也存在三个不足之处.

1. 对教材的把握上

肖老师在对教材的处理上, 难免会出现只有“承上”(在问题1的讨论和解决上, 学生积极性很高, 气氛热烈), 而没有“启下”(学生并没

有真正领悟用作函数图象的方法解二元一次方程组的实质)的局面. 导致大多数学生仍用传统的方法来解二元一次方程组.

2. *在教学方式上*

在对问题1的处理上, 教师只是让学生讨论分析, 然后以问答式来回答问题. 对解二元一次方程组这个例题的教学, 教师仅采用示范式.

3. *在问题的设计上*

教师的提问, 使学生丈二和尚摸不着头脑. 究其原因, 是教师没有在学生的"最近发展区"处提出问题, 所提问题缺少一定的梯度, 过于笼统.

三、师徒备课　师傅上课

1. *呈现问题情境*

某种摩托车的油箱最多可储油10升, 加满油后, 油箱中的剩余油量y(升)与摩托车行驶路程x(千米)之间的关系如图2所示,根据图象回答下列问题:

(1) 一箱汽油可供摩托车行驶多少千米?

(2) 摩托车每行驶100千米消耗多少升汽油?

(3) 油箱中的剩余油量小于1升时, 摩托车将自动报警, 行驶多少千米后, 摩托车将自动报警?

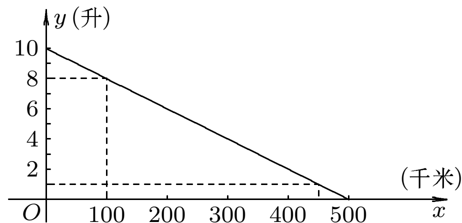


图 2

2. *直观感知, 活动探究*

第一步, 直观感知: 引导学生观察图象与两坐标轴交点的实际意义, 图象从左到右的走向所反映的实际意义, 让学生在脑子中很快产生"摩托车加满油10升后开始出发, 行驶到点500千米时油箱中剩余油量为零."的直觉, 进而引导学生根据函数的对应关系, 得到摩托车行驶过程中, 行驶路程与余油量之间的对应关系.

第二步, 活动探究: (1) 活动准备, 课前教师将印有示意图的白纸发给学生, 学生准备好三角板和铅笔. (2) 合作交流, 学生经过小范围的交流, 弄清变量之间的对应关系. (3) 动手"画图", 在示意图上画出摩托车行驶100千米时的余油量之间的对应"线段" 及油箱中的剩余油量为1升时的摩托车行驶的千米数之间的对应"线段".

第三步, 归纳引申, 生成新知: 经历以上两步学习过程, 及时引导学生归纳通过获取函数的图象有关信息, 解决有关实际问题的策略是必须明确两个变量的对应值的实际意义, 可通过作"对应线段"的方法近似得到. 考虑到学生在画"对应线段"时可能出现的误差, 接着教师投石问路: 如何根据已知一个变量的数值更精确求出另一个变量的对应值呢? 说说你们的想法? 显然学生自然会联想到先通过求一次函数的关系式, 再根据一个变量的数值求另一个变量的对应值, 同时会出现强烈地参与热情, 有不试不快的感觉.

3. *应用拓展, 迁移提高*

出示课本上的问题1, 作为函数图象的一个实际应用. 在引导学生讨论时, 重点放在两个函数图象的交点上, 充分理解这个"交点"的实际意义, 动手画出"交点"处两个变量之间的对应线段, 便于学生直观理解. 在此基础上, 我向同学们进一步提出纵向迁移性的问题:

(1) 你能否根据图象, 分别求出两复印社每月收费y(元)与复印页数x(页)之间的函数关系式? 能否利用函数关系式来验证问题1中的第(2)题 "当每月复印多少页时, 两复印社实际收费相同?" 所得到的结果?

(2) 两个函数在交点处的自变量x、函数值y是否相等? 你能发现交点的坐标(800, 320)与两个函数关系式联立而成的方程组

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{5}x, \\ y=\dfrac{3}{20}x+320 \end{cases}$$

的解之间的关系吗? 请大胆猜想并加以验证.

(下转第12–6页)

“心动”了吗?

——对新课程数学课堂教学几例的一点反思

312030 浙江省绍兴县柯岩中学 沈志勇

随着新课程改革进程的发展, 新课程理念已经渗透到教师心田, 教师的教学方式, 学生的学习方式确实发生了变化. 课堂教学进入了一种新的模式: 学生动手实践、自主探索、合作交流.

教学中充分调动了学生的各种感官, 学生在学习过程中“动眼、动耳、动手、动脑、动情”, 课堂动起来了. 但是活跃的课堂气氛的外表下有些现象却发人深省.

一、眼动、“心动”?

案例1 绍兴市优质课评比《等腰三角形》片段.

引入 播放一段录像: 环境优美的别墅群, 镜头定格房顶, 引出等腰三角形模型.

探究性质 电脑演示: 动画演示翻折等腰$\triangle ABC$, 重合.

点评: 为引入一个等腰三角形的模型, 拍来录像, 费尽周折, 是否有杀鸡用牛刀之嫌? 学生眼动起来了, 但学生“心动”了吗? 如果取下初一学生佩戴的红领巾不就有同样的效果吗? 同样体现数学从生活中来. 或让学生折纸, 剪出一个三角形, 让学生量两腰…… 再对折, 探究性质, 便是环环相扣, 更能揭示本质.

同样, 在笔者听过的《生活中的轴对称》一节课中, 施教者采用课件引入大量的轴对称的名胜古迹、现代的建筑, 共同探究, 让学生回答这些名胜、建筑有什么共同的特点? 学生甲回答: “建筑物气势非凡, 祖国多名胜.” 令听课者哑然失笑. 这些“动”只停留在表面的热闹, 而实质上没有给学生认知上的冲突, 内心的震撼, 理智的挑战, 即本文所说的“心动”.

二、手动、“心动”?

案例2 《立体图形的表面展开图》片段.

第40分钟学生练习: 下面是一多面体的表面展开图, 每个面内都标注了字母, 请根据要求回答问题: (1) 如果面A在多面体的底部, 那么哪一个面会在上面?

(2) 如果面F在前面, 从左面看是面B, 那么哪一面会在上面?

(3) 如果从右面看是面C, 面D在后面, 那么哪一面会在上面?

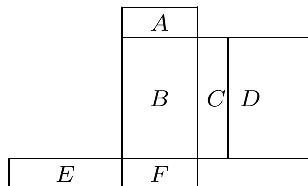


图 1

课堂上教师用教具演示后, 再让学生回答.

点评: 此时真的需要动手操作吗? 此题确实有难度, 如果仅仅依靠空间想象, 对一些学生来讲很难; 如果采用实验的方法, 费时、又受场地材料的限制. 但是学生做此题是在学习了40分钟相关内容后提出来的, 学生对此类问题的解决应该已经具有理性思维能力.

以活动为载体的感性认识最终应该升华为理性认识, 培养理性思维能力是数学学习的核心目标之一. 如果我们的学生在做这个题时, 还必须依赖动手操作, 只能说明前面40分钟的活动, 只为“动手”而动, 未能使学生真正的“心动” (理性思维).

案例3 绍兴市2004年数学中考试卷第12题: 如图2, 一张长方形纸片沿AB对折, 以AB中点O为顶点将平角五等分, 并沿五等分的折线折叠, 再沿CD剪开, 使展开后为正五角星

(正五边形对角线所构成的图形), 则$\angle OCD$等于…………………………………………………( )

(A) 108°; (B) 114°; (C) 126°; (D) 129°.

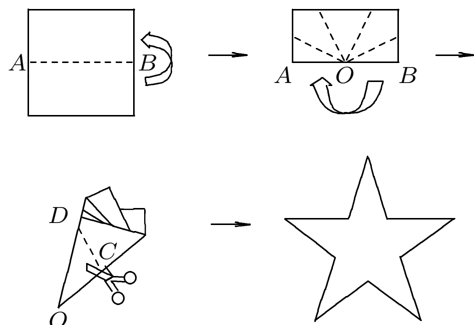


图 2

此题极具创意, 解决这类题目通常可以借助现成的材料, 亲手操作, 然后观察思考, 得出答案. 因此部分教师后悔没有让学生带剪刀进考场.

点评: 限于考场的环境和条件, 难道真的在考试中剪剪拼拼? 难道下次考测量教学楼的高度, 我们的学生都跑到操场上去一边测量一边考试吗? 学生在接受初中三年数学教学后, 已经具备利用数学知识、数学方法解决这类问题的理性思维. 教师大可不必有不带剪刀的担忧.

数学需要动手, 但"获得"有三个组成部分: 数学操作技能的形成、数学经验和思想观念, 这三个方面共同决定数学学习的质量, 而操作是完成数学任务的一种活动方式, 最终要获得的是对数学经验和理论的理解、升华和对新理论的内化.

案例4 轴对称应用片段.

展示中国民间艺术之一——剪纸. 把一张纸经过数次折叠后, 用剪刀剪去其中一部分, 得到令人称奇的图案.

活动: 做一做、把一个圆经过对折再对折后, 用剪刀剪取一个三角形(如图3), 你想象一下展开后的平面图形是什么? 展开后验证你的想象.

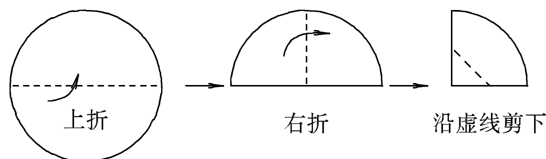


图 3

教学关键: 让学生在活动过程中, 感受到把一个图形对折, 这个图形是关于折痕对称的. 因此要得到展开图, 并不一定得打开图形, 只要依照折纸的先后顺序, 逐步倒推, 如图4, 动手补出全等(对称)图形.

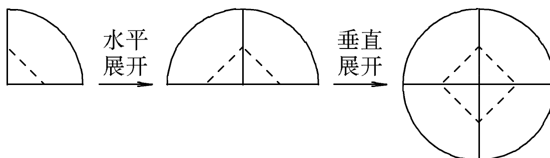


图 4

练习: 2004年河南省中考题:

如图5, 把一个正方形三次对折后沿虚线剪下, 则所得的图形是………………………( )

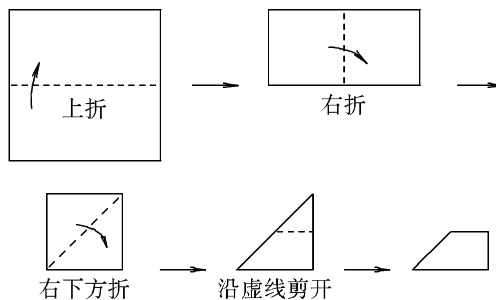
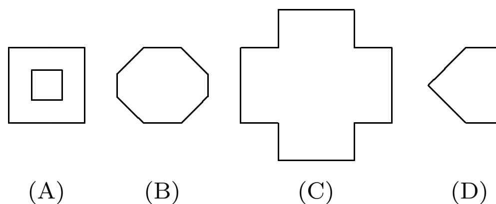


图 5



解决问题过程:

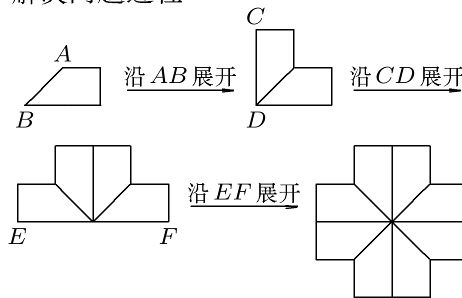


图 6

点评: 1. 在教学中利用剪纸, 环节设计合理,

没有牵强附会; 自然地、朴实地渗透了生活美、数学美.

2.学生清楚对折重合的图形是关于折痕对称(全等)的, 这里的数学知识是已知的、外显的、明了的. 逐步倒推是解决这个问题的数学思想方法, 正是解答此题的关键, 一旦掌握这一方法, 便说明学生能用理性思维去解决这一问题, 是对这一认知的升华, 也意味着这一教学的成功.

我们在数学活动中, 不能为活动而活动, 不能为迎合所谓的新课程教学模式营造课堂气氛而活动. 我们在活动中可以围绕以下问题展开: 我们面对什么样的问题? 这个问题引进的相关概念、方法是什么? 通过数学活动, 感悟到哪些数学思想、方法? 数学知识、思想、方法之间的联系是什么? 本质是什么?

三、情动、"心动"?

案例5 《可能还是确定》片段.

活动: 出示"拔苗助长"、"守株待兔"、"铁棒磨成针"等几幅图片, 让学生讨论是可能还是确定.

教师提问: 是确定还是可能? 这些画给你什么启示?

教师在肯定学生的答案后, 针对图片的寓言意义渗透德育教学.

现场反馈: 学生更多的注意力转移到对寓意的不同见解中.

点评: 这是一堂数学课, 还是政治课、语文课? 难道这就是课程整合? 在这里选取这几个例题来巩固概念, 拓展外延是否恰当?

"人文精神"在数学课堂中的渗透, 是新课程理念下广大教师"崇尚"和"时尚". 情景教学、人文教学是数学课堂必不可少的一个程序, 但是并不是每节课都能创设情境, 也不是每节课都需要创设情境; 同样人文精神的渗透也应是自然的流露和水到渠成的展示.. 过多的、矫情的情景创设、人文渗透难免会掩盖数学本质, 消弱数学的魅力. 就像上例中的几个例子偏离了数学范畴, 导致学生出现偏离数学的答案和思维.

四、一人"心动"、一起"心动"?

新课程课堂教学中, 老师动辄讨论、小组合作. 一般的, 较简单的认知学习任务只需个人独立自学或全班教学即可; 较复杂的、综合的学习任务才采用不同的合作学习方式.

案例6 《设计轴对称图形》片段

练习: 用四块如图7的瓷砖拼成一个正方形. 形成轴对称图形. 跟你的同伴比一比, 看谁的拼法多?

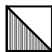


图 7

课堂活动: 1.学生独立创作. 一般学生都能创作出4～5种.

2.相互交流. 综合发现拼法居然会有十几种.

3.小组合作. 小组汇合各种拼法, 找出设计这些图案的一些规律.

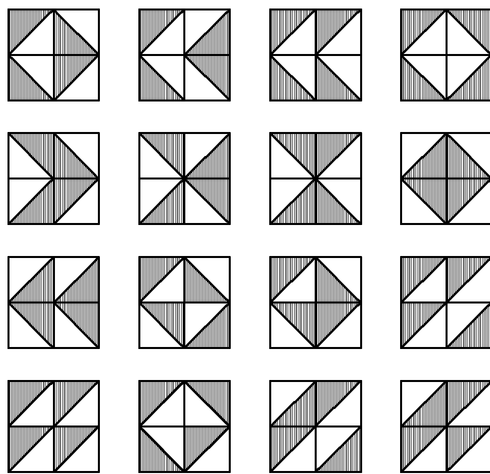


图 8

点评: 课堂活动并不是一开始就合作, 而是给学生一定的独立思考时间, 合作学习在独立学习的基础上进行.

当遇到一个问题首先应该自己去面对, 去想办法解决, 但一个人的力量难于解决这个问题, 才考虑寻求帮助, 与人合作. 如果只有合作而缺乏独立学习, 长此以往, 学生的自主学习能力将丧失, 学生走向社会就会觉得无助, 难

(下转第12-9页)

如何"打的"最省钱——研究性学习教学案例

200052 上海市番禺中学 朱 平

上海二期课改高中数学课本(试验本)中,在每一章都设计了意味深长、颇具"弹性"的"探究与实践问题". 本文将结合高一数学课本(试验本) P79课题三 "上海出租车计价问题", 谈谈自己在教学过程中的一点作法和体会.

学习目标:

1. 知识目标: 学生理解函数概念, 掌握分情况讨论的数学思想, 会根据实际问题抽象概括出函数关系式.

2. 能力目标: 学生通过研究实践活动, 掌握在开放性环境中获取、收集、处理信息能力, 包括发现问题、提出问题、解决问题的能力, 表述思想和交流成果的能力等.

3. 情感目标: 通过主动探究的实践活动, 使学生获得亲自参与研究探索的积极情感体验和主动求知、乐于探究的心理品质.

课前准备:

学生调查上海出租车计价办法:

起步费10元, 可行3千米; 3千米以后按每千米2元计价, 可再行7千米; 以后每千米按3元计价, 途中停车每5分钟按1km计价.

教学过程:

第一步:分析变量之间的关系

T: 出租车的车费与那些量有关?

S_1: 与行车时间有关.

S_2: 与行车里程有关.

S_3: 与时间、里程都有关, 但与里程的关系更密切, 因为我几次从家到中山公园地铁站都是14元或15元, 而有时司机开得快, 有时开得慢, 似乎车费与时间无关. 当然, 如果恰巧遇到交通堵塞, 那么车费会更高些.

第二步: 建立车费关于里程的函数

T: 忽略某些非关键的变量, 而使变量之间的关系得到简化是数学建模的重要策略.

S: 如果途中停车等待的时间被忽略, 我们能建立车费关于里程的函数关系:

设行程x公里, 车费y元, 则

$$y=\begin{cases}10, & x\in(0,3]\\ 10+2(x-3), & x\in(3,10]\\ 24+3(x-10), & x\in(10,+\infty),\end{cases}$$

$$\text{即 } y=\begin{cases}10, & x\in(0,3]\\ 2x+4, & x\in(3,10]\\ 3x-6, & x\in(10,+\infty).\end{cases}$$

T: 在建立车费关于里程的函数关系时应注意什么问题?

S: 注意分段计价的问题和里程的取值范围.

第三步: 如何"打的"可以省钱? (给出课题)

T: 如果我们学校距离浦东国际机场65千米, 忽略等待时间, "打的"到浦东国际机场需要多少车费?

很多同学利用函数解析式计算得$3\times65-6=189$(元).

T: 一定要那么多钱? 可以省一些吗?

几分钟后……

S_1: 老师, 如果我中途要求下车, 重新叫一辆出租车, 肯定会比较省一些…….

S_2: 我们发现第一个10千米比后面的10千米节省6元…….

S_3: 因为平均每千米车费有3种可能情况:

$0\sim3$千米时, 3.3元/千米;

$3\sim10$千米时, 2元/千米;

10千米以上时, 3元/千米.

$0\sim10$千米时, 平均每千米车费2.4元, 10千米以上时单价最贵, 应该尽量避开10千米以上的计价…….

S_4: 我的乘车策略是每10千米时翻牌重新计价, 采取优化策略7次计价, 就是$24 \times 6 + 10 + 4 = 158$(元), 可节省31元.

T: 请学生们设计乘车策略, 车费最少是多少? 并列出最少车费关于行程的函数关系式(特意让四人学习小组的每一名学生发言, 以考查合作学习程度).

S: 设行程

$x = 10n + r, n \in \mathbf{N}, r \in [0, 10)$,

每10千米时翻牌重新计价, 于是最低车费

$$y = \begin{cases} 24n + 10, & r \in (0, 3] \\ 24n + 2r + 4, & r \in (3, 10). \end{cases}$$

T: 如果按这个乘车策略, 假设我们学校距离浦东国际机场63千米, 忽略等待时间, 那么车费最少是多少?

S_1: $24 \times 6 + 10 = 154$(元).

T: 还可以更少吗?

S_2: 取消最后一次的翻牌可以更省! 因为最后一次的翻牌使最后3千米计价10元, 而取消最后一次翻牌, 最后3千米只有9元. 即5个10千米再加上1个13千米, 也就是$24 \times 5 + 24 + 3 \times 3 = 153$(元), 可以再省1元! 采取优化策略6次计价.

S_3: 我发现了! 14千米是个关键里程. 因为14千米时一次计价$3 \times 14 - 6 = 36$(元), 两次计价10千米+4千米也为24+10+2=36(元), 因此它可以作为是否重新翻牌的分界线, 也就是行程超过14千米再翻一次牌, 不超过14千米时不翻牌.

(同学们非常兴奋地、激烈地抢着讲)

T: 试写出最少车费关于行程的函数关系式. 经各小组讨论和交流, 板演后相互补充, 得到下列结论:

设行程是x公里, 车费是y元, 令 $x = 10n + r, n \in \mathbf{N}, r \in [0, 10)$,

$$y = \begin{cases} 10, & n = 0, r \in (0, 3] \\ 4 + 2r, & n = 0, r \in (3, 10] \\ 24n + 3r, & n > 0, r \in (0, 4] \\ 24n + 4 + 2r, & n > 0, r \in (4, 10]. \end{cases}$$

小结:

T: 那个同学能谈谈本节课的收获?

S_1: 我学会了省钱, 我觉得学习数学最生动的一面就是能和我们的实际生活相结合, 用建立数学模型来解决实际问题, 它能让我变得聪明.

S_2: 这节课我们通过独立思考, 小组讨论进行研究性学习, 进一步理解了函数的三要素——定义域、值域、对应法则, 我对函数产生了兴趣.

T: 要使模型更加精确, 还有一些枝节问题需要处理, 如等待时间, 另外注意到上海出租车的计费系统是以元为单位计价的, 有兴趣的同学课后可以通过调查、研究将上述解析式进行完善 (为各层次学生提供探索空间).

变式训练:

上因特网的费用由两部分组成: 电话费和上网费.

以前上海地区通过"上海热线"上因特网的计费方式是: 电话费每3分钟0.12元, 上网费每分钟0.12元, 根据信息产业部调整因特网资费的要求自1999年3月1日起, 上海地区上因特网的费用调整, 新的计费方式是, 电话费每3分钟0.16元, 上网费每月不超过60小时, 以每小时4.0元计算, 超过60小时的部分, 以每小时8.00元计算.

(1) 根据调整后的规定, 将每月上因特网的费用y(元)表示为上网时间t(小时)的函数 (每月按30天计算).

(2) 某网民在其家庭经济预算中有一笔每月上网60小时的费用支出, 资费调整后, 若要不超过其家庭经济预算中上网费支出, 该网民现在可上网多少小时?

(3) 资费调整前后的计费方式哪一种费用比较低? 说明理由. 某网民在其家庭经济预算中有一笔每月上网60小时的费用支出, 资费调整后, 若要不超过其家庭经济预算中上网费支出,该网民现在可上网多少小时?

(4) 在同一坐标系内画出资费调整前后的函数图象, 并加以解释.

"含递推关系的数列问题(高三复习)"课例研究

215003 江苏省苏州市教育科学研究院 祁 平

一、教学目的

1. 使学生能熟练运用"迭加法"、"迭乘法"来研究简单的含二项递推关系的数列问题.

2. 能运用化归思想将多项递推关系的数列问题转化为熟悉的易于解决的问题.

3. 培养学生善于观察, 勇于创新的能力, 努力拓展学生的思维空间.

二、教学过程

1. 问题提出

教师: 近十年来, 含递推关系的数列问题时有出现在高考试卷上(如2005年高考江苏数学卷第23题), 随着新课改的推进, 这类问题将成为热点问题之一, 因为, 这类问题灵活性强, 需要考生有较强的逻辑推理能力, 综合运用知识的能力, 以及对数学思想方法的正确认识和把握. 这节课我们一起来研究这类问题.

2. 例题选讲

先看一个简单例子: 数列$\{a_n\}$中, $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+3\quad(n\geqslant 2)$,

你发现了什么?

学生回答: 这是一个等差数列, $\cdots\cdots$.

教师: 将$a_n=a_{n-1}+3$中的3改为3^{n-1}即为:

例1 (2003年全国高考文科试题) 已知数列$\{a_n\}$中, $a_1=1$, $a_n=a_{n-1}+3^{n-1}$ $(n\geqslant 2)$, 求$\{a_n\}$的通项公式.

教师: 细小的变化, 给我们很大的思考空间.

学生用迭加法给出$a_n=\dfrac{3^n-1}{2}$ $(n\geqslant 1)$, 教师强调迭加法是基本方法, 将问题改为$a_n=a_{n-1}\times 3^{n-1}$, 用迭乘法可求$a_n$.

例2 (2004年全国高考理科试题) 已知数列$\{a_n\}$中, $a_1=1$, 且

$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k$,

$a_{2k+1}=a_{2k}+3^k$,

其中$k=1, 2, 3, \cdots$.

(I) 求a_3、a_5;

(II) 求$\{a_n\}$的通项公式.

教师引导学生观察: 问题结构含两个递推关系式, 易获得$a_3=3$, $a_5=13$. 如何求a_n呢?

学生: 仿例1, 用迭加法研究$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k$. 出现困难.

另一个学生发言, 认为还要考虑$a_{2k+1}=a_{2k}+3^k$. 为此, 得如下过程:

$a_2=a_1+(-1)^1$,

$a_3=a_2+3^1$,

$a_4=a_3+(-1)^2$,

$a_5=a_4+3^2$,

$a_6=a_5+(-1)^3$,

$\cdots$

$a_{2k-1}=a_{2(k-1)}+3^{k-1}$,

$a_{2k}=a_{2k-1}+(-1)^k$.

叠加得$a_{2k}=a_1+(-1)^1+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^k+3^1+3^2+\cdots+3^{k-1}$.

$$a_{2k}=\frac{3^k-1}{2}+\frac{-1\times[1-(-1)^k]}{1-(-1)}=\frac{3^k-2+(-1)^k}{2},$$

$$\therefore a_{2k+1}=\frac{3^k-2+(-1)^k}{2}+3^k=\frac{3^{k+1}+(-1)^k-2}{2}.$$

当n为偶数时(令$n=2k$),

$$a_n=\frac{3^{\frac{n}{2}}-2+(-1)^{\frac{n}{2}}}{2};$$

当n为奇数时(令$n=2k+1$),

$$a_n=\frac{3^{\frac{n+1}{2}}+(-1)^{\frac{n-1}{2}}-2}{2}.$$

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{3^{\frac{n}{2}}-2+(-1)^{\frac{n}{2}}}{2} & (n\text{为偶数}),\\ \dfrac{3^{\frac{n+1}{2}}+(-1)^{\frac{n-1}{2}}-2}{2} & (n\text{为奇数}).\end{cases}$$

教师: ① 表扬同学们积极思考的热情, 以及能在逆境中冷静地分析问题, 勇于创新的精神.

② 整体思考问题是一种哲学方法.

③ 刚才的解, 美中不足是忽视了 a_1(学生感到惊讶, 并找出了错误原因), 教师强调细节决定成败.

将例1稍加修改, 就是一道富有挑战性的试题:

例3 (2004年重庆理科试题) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$. 证明: $a_n>\sqrt{2n+1}$ 对一切正整数 n 成立.

学生: $a_2=a_1+\dfrac{1}{a_1}$,

$a_3=a_2+\dfrac{1}{a_2}$,

$\cdots$

$a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{a_{n-1}}$,

相加得

$$a_n=a_1+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right),$$

即只要证

$$a_n=a_1+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right)>\sqrt{2n+1}.$$

(失败了, 全体学生表情稍严肃)

教师: 怎么办?

"失败是成功之母", 有人认为刚才的方法走向更遥远的地方了, 形式更复杂了.

再观察: 从微观上观察(根号的启示), 可否证 $a_n^2>2n+1$ 呢?

由此想到将 $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ 两边平方, 得 $a_{n+1}^2=a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}+2$, 再用迭加法就水到渠成了.

证明: 由递推式得 $a_n^2=a_{n-1}^2+2+\dfrac{1}{a_{n-1}^2}$, 则 $a_2^2=a_1^2+2+\dfrac{1}{a_1^2}$,

$a_3^2=a_2^2+2+\dfrac{1}{a_2^2}$,

$\cdots$

$a_{n-1}^2=a_{n-2}^2+2+\dfrac{1}{a_{n-2}^2}$,

$a_n^2=a_{n-1}^2+2+\dfrac{1}{a_{n-1}^2}$ $(n\geqslant 2,\ n\in\mathbf{N}^*)$.

上述各式相加并化简得

$$\begin{aligned}a_n^2&=a_1^2+2(n-1)+\frac{1}{a_1^2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}^2}\\&>2^2+2(n-1)\\&=2n+2\\&>2n+1\ (n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*).\end{aligned}$$

又 $n=1$ 时, $a_n>\sqrt{2n+1}$ 明显成立, 故 $a_n>\sqrt{2n+1}$ $(n=1, 2, \cdots)$.

教师: ① 由此看到, 如何将陌生的问题(在陷入困境时)转化为熟悉的问题, 观察是第一步.

② 一开始的分析虽然失败, 但我们还发现什么? 发现了一道新题, 求证:

$$a_1+\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}\right)>\sqrt{2n+1}$$

(题设不变).

这道新题有一定难度，给我们更大的思考空间, 给我们很多启发. 我们要改进和转变教师的教学方式, 要关注学生的学习方式, 培养学生科学的学习方法.

刚才我们研究的都是二项递推数列问题, 略加改变, 可得多项递推数列问题:

例4 设正项数列 $\{a_n\}$ 满足于 $2(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)=a_n+\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1, 2, 3, \cdots)$.

(Ⅰ) 求证: $\left\{a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$ 成等差数列;

(Ⅱ) 求 $\{a_n\}$ 的通项.

教师: 谁喜欢多项关系式? 谁喜欢复杂? 项多不易控制! 我们可干什么?

学生: 消去一些项.

教师: 对. 最好能化归为简单的"二项递推数列"问题. 于是得到下面的解法:

(I) 令 $n=1$, 得 $2a_1=a_1+\dfrac{1}{a_1}$, 即 $a_1=\dfrac{1}{a_1}$, $\because a_1>0$, $\therefore a_1=1$.

当 $n\geqslant 2$ 时

$$\begin{cases} 2(a_1+a_2+a_3+\cdots \\ \qquad +a_{n-1}+a_n)=a_n+\dfrac{1}{a_n}, & (1)\\ 2(a_1+a_2+a_3+\cdots \\ \qquad +a_{n-1})=a_{n-1}+\dfrac{1}{a_{n-1}}, & (2)\end{cases}$$

$(1)-(2)$ 得

$$a_n-\frac{1}{a_n}=-\left(a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}\right), \qquad (3)$$

(项数减少了)

两边平方得 $a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}-2=a_{n-1}^2+\dfrac{1}{a_{n-1}^2}+2$, 即 $\left(a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}\right)-\left(a_{n-1}^2+\dfrac{1}{a_{n-1}^2}\right)=4$,

故 $\left\{a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$ 是以 2 为首项, 4 为公差的等差数列.

(Ⅱ) 由 (I) 得 $a_n^2+\dfrac{1}{a_n^2}=2+4(n-1)=4n-2$,

所以 $\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)^2=4n$, 即 $a_n+\dfrac{1}{a_n}=2\sqrt{n}$, 解得 $a_n=\sqrt{n}\pm\sqrt{n-1}$,

由 (3) 得 $\dfrac{1}{a_n}-a_n=a_{n-1}+\dfrac{1}{a_{n-1}}>0$, 故 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

进一步品味:

① 若无第1小题, 你能想到将 (3) 两边平方吗?

② 若先猜后证呢? 猜得 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$, 我们可以用数学归纳法证明:

$a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\,(n\geqslant 1)$ 成立.

③ 若从方程思想的角度看, 先求 $S_n=\sqrt{n}$ 就容易求得 a_n 了. 请同学们课外完成.

更一般地我们可以研究如下两个问题:

例5 (2004年全国高考理科试题) 已知数列 $\{a_n\}$, 满足 $a_1=1$, $a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}\ (n\geqslant 2)$. 求 $\{a_n\}$ 的通项.

仿例4, 学生容易得到下面的解法:

由已知条件可得

$$\begin{cases} a_1+2a_2++3a_3+\cdots \\ \qquad +(n-1)a_{n-1}=a_n, & (1)\\ a_1+2a_2++3a_3+\cdots \\ \qquad +(n-1)a_{n-1}+na_n=a_{n+1}, & (2)\end{cases}$$

$(2)-(1)$ 得 $na_n=a_{n+1}-a_n$,

即 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=n+1\,(n\geqslant 2)$ (消项使问题水落石出, 这里递推关系式的使用, 给我们“借水行舟”的感觉).

$$于是\begin{cases}\dfrac{a_3}{a_2}=3,\\ \dfrac{a_4}{a_3}=4,\\ \cdots\\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=n+1\,(n\geqslant 2),\end{cases}$$

迭乘得 $\dfrac{a_{n+1}}{a_2}=3\cdot 4\cdot\cdots\cdot(n+1),(n\geqslant 2)$ (这是熟悉的问题).

又 $a_2=1$, $a_3=a_1+2a_2=3$.

$a_{n+1}=\dfrac{(n+1)!}{2}\,(n\geqslant 2)$,

$a_2=1=\dfrac{2!}{2}$, 于是 $a_n=\dfrac{n!}{2}\,(n\geqslant 2)$.

例6 数列 $\{a_n\}$ 的通项为 $a_n=2n-1\,(n\geqslant 2)$, 数列 $\{c_n\}$ 满足 $\dfrac{c_1}{3^0}+\dfrac{c_2}{3^1}+\dfrac{c_3}{3^2}+\cdots+\dfrac{c_n}{3^{n-1}}=a_{n+1}\,(n\geqslant 1)$, 求 $\sum\limits_{i=1}^{2005}c_i$.

例6作为练习题, 由学生自行解答.

$$\frac{c_1}{3^0}+\frac{c_2}{3^1}+\frac{c_3}{3^2}+\cdots+\frac{c_n}{3^{n-1}}=a_{n+1}\,(n\geqslant 1), \quad ①$$

$$\frac{c_1}{3^0}+\frac{c_2}{3^1}+\frac{c_3}{3^2}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{3^{n-2}}=a_n\,(n\geqslant 2), \quad ②$$

① $-$ ② 得 $c_n=2\cdot 3^{n-1}\,(n\geqslant 2)$ (这是我们熟悉的数列).

当 $n=1$ 时, 由 ① 得 $c_1=a_2=3$,

故 $c_n=\begin{cases}3, & (n=1)\\ 2\cdot 3^{n-1}, & (n\geqslant 2).\end{cases}$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2005}c_i&=3+2\left(3+3^2+\cdots+3^{2004}\right)\\&=1+2\left(1+3+3^2+\cdots+3^{2004}\right)\\&=1+2\cdot\frac{1-3^{2005}}{1-3}=3^{2005}.\end{aligned}$$

教师简要评讲: 说明通过“消项”将复杂问题化归为“二项递推数列问题”, 即通过化归, 使复杂变为简单, 使陌生化为熟悉. 强调化归是

(下转第12–49页)

玩味数学　举重若轻　玩出创新

200062　华东师范大学数学系　邹一心

数学大师陈省身曾作题词:“数学好玩”. 游戏人人会玩, 各有巧妙不同. 是否可以这样玩法: 一玩描红, 使所谓“愚”者参加智力游戏能有台阶; 二玩图表, 使“数”的问题披上“形”的外衣; 三玩实验, 使演绎推理暂由合情推理过渡; 四玩发现, 使新的猜想浮出水面. 以上“四玩”是否也能概括为如下16字操作诀: 依样画瓢(虽非克隆, 参照有方), 借助图表(图表、符号, 双语齐下), 理性实验(大智若愚, 愚、智转化), 重在发现(大胆猜想, 小心求证). 当然, 此外还可玩电脑, 促成“四玩”与电脑牵手, 争取玩得更好.

本文现以解决一类整数题为例, 探讨高中生培养创新能力能否通过玩味数学, 举重若轻, 着眼于“趣”、“研”, 玩出创新? 尤其是探讨起始阶段的培养能否更宜如此?

例1　(2005年上海高考第12题)用n个不同的实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$可得到$n!$个不同的排列, 每个排列为一行写成一个$n!$行的数阵. 对第i行$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$, 记$b_i=-a_{i1}+2a_{i2}-3a_{i3}+\cdots+(-1)^n na_{in}$, $i=1, 2, 3, \cdots, n!$. 例如: 用1, 2, 3可得数阵如下, 由于此数阵中每一列各数之和都是12, 所以, $b_1+b_2+\cdots+b_6=-12+2\times 12-3\times 12=-24$. 那么, 在用1, 2, 3, 4, 5形成的数阵中, $b_1+b_2+\cdots+b_{120}=$ ________.

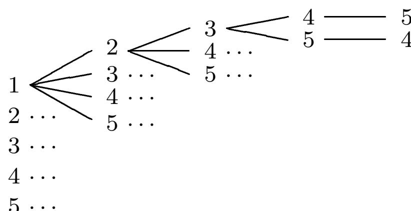
1　2　3
1　3　2
2　1　3
2　3　1
3　1　2
3　2　1

原样1: $3!=6$;

新瓢1: $5!=120$.

原样2: 题给数阵图;

新瓢2: 树形图;



原样3: 每原列各数之和为12;

新瓢3: 每新列各数之和为多少?

	每行各数之和	总行数	数阵中各数之总和	总列数	每列各数之和
原样	6	3!=6行	$6\times 6=36$	3列	$36\div 3=12$
新瓢	15	$5!=120$行	$15\times 120=1800$	5列	$1800\div 5=360$

原样4: $\sum\limits_{i=1}^{6} b_i=-12+2\times 12-3\times 12=-24$;

新瓢4: $\sum\limits_{i=1}^{120} b_i=-360+2\times 360-3\times 360+4\times 360-5\times 360=-1080$.

因此本题答案为-1080.

有所发现: 怎样表达$\sum\limits_{i=1}^{n} b_i$?

例2　(1963年北京市中学生数学竞赛题) 设有2^n个球, 分成若干堆, 并设可以任选甲、乙两堆, 按以下规则挪动: 若甲堆的球数p不少于乙堆的球数q, 则从甲堆中拿出q个球放到乙堆中去, 这样算是挪动一次. 证明: 可以经过这样的有限次挪动, 把所有的球合并成一堆.

原样1: 文字规则;

新瓢1: 规则翻译: 情况 ①: 如图1, 设甲堆球数为大数, 乙堆球数为小数, 则从甲堆大数中拿出小数放到乙堆中去, 这称为挪动一次. 情况 ②: 如图2, 设甲、乙两堆球数相同, 则从甲堆中将球全部拿出, 放到乙堆中去, 显然已成一堆.

原样2: 文字翻译;

新瓢2: 翻译图示.

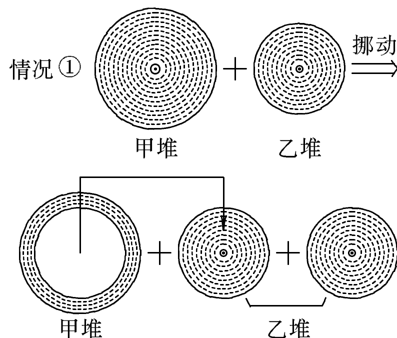


图 1

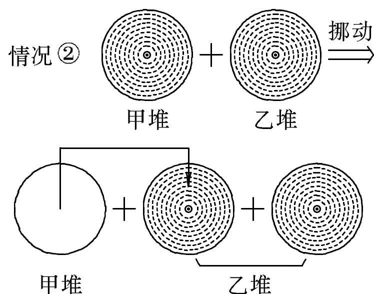


图 2

原样3: 赋值, 不妨令 $n=3$. 共 $2^3=8$ 球;

新瓢3: ②+③+③ $\Longrightarrow$ ②+⑥ $\Longrightarrow$ ④+④ $\Longrightarrow$ ⓪+⑧;

或⑤+③$\Longrightarrow$②+⑥;

或⑦+①$\Longrightarrow$⑥+②.

发现1　大胆猜想: 假设当 $n=1, 2, \cdots, k$ 时, 2^n 个球经挪动总能并成一堆, 那么当 $n=k+1$ 时, 2^{k+1} 个球是否也总能并成一堆呢?

发现2　蹊径: 由于 $2^{k+1}=2\times 2^k$, 于是想到: 能否将上述之球两两捆绑配对, 使2球视作1球呢?

发现3　小心排疑: 把总球分成若干堆, 若其中有些堆有偶数个球, 当然可两两捆绑; 但若有些堆有奇数个球, 且这样的堆为偶数堆, 则通过规则挪动, 总可转化为每堆为偶数个球, 然后再两两捆绑; 若有些堆有奇数个球, 且这样的堆为奇数堆, 即

$$\underbrace{\text{㊅}+\text{㊅}+\cdots+\text{㊅}}_{\text{奇数堆}},$$

怎能两两捆绑? 然而此事为子虚乌有! 因为此与总球数 2^n 为偶数相矛盾.

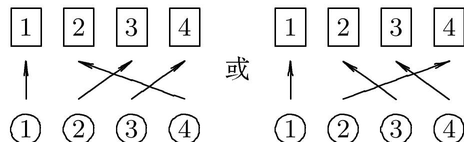
发现4　本题结论为封闭题, 怎样改为开放题呢?

例3　(1991年上海市高考第16题)设有编号为1, 2, 3, 4, 5的五个球和编号为1, 2, 3, 4, 5的五个盒子. 现将这五个球投放到这五个盒内, 要求每个盒内投放一个球, 并且恰好有两个球的编号与盒子的编号相同, 则这样的投放方法的总数为 ……………………………( )

(A) 20;　(B) 30;　(C) 60;　(D) 120.

原样1: 佯退. 设球与盒非各为5个, 而是各为4个; 且规定不是两个球与盒分别同编号, 而是仅一球与一盒同编号.

新瓢1: 映射.



发现1　中介语言: 比抽象的具体, 比具体的抽象.

令 $f_1=\{(\bigcirc_1, \square_1), (\bigcirc_2, \square_3), (\bigcirc_3, \square_4), (\bigcirc_4, \square_2)\}$,

$f_2=\{(\bigcirc_1, \square_1), (\bigcirc_2, \square_4), (\bigcirc_3, \square_2), (\bigcirc_4, \square_3)\}$,

$\cdots$

发现2　设第 i 个球投入第 j 个盒, 用序偶表示为 (i, j), 于是:

$f_1=\{(1,1),(2,3),(3,4),(4,2)\}$,

$f_2=\{(1,1),(2,4),(3,2),(4,3)\}$,

$\cdots$

$f_7=\{(4,4),(1,2),(2,3),(3,1)\}$,

$f_8=\{(4,4),(1,3),(2,1),(3,2)\}$.

原样2: $C_4^1\cdot C_2^1=8$;

新瓢2: $C_5^2\cdot C_2^1=20$.

因此, 本题应选(A).

发现3　如何将本题抓球入盒的特殊问题改编并推广为书籍归架、住房分配、鸽笼对应、照相选位等更一般化的命题呢?

例4　设 n 个正整数, 满足 $0<a_1<a_2<\cdots<a_n$, 则在 2^n 个整数

$$\sum_{i=1}^{n} t_i a_i = t_1 a_1 + t_2 a_2 + \cdots + t_n a_n \cdots\cdots (1)$$

(其中t_i取1或-1; $i = 1, 2, \cdots, n$)中, 问: 至少存在多少个不同的整数? 这些不同整数的奇偶性特点怎样?

理性实验1: 解复杂题思维受阻, 权且解简单题. 不妨设$n = 3$, 则题简意明: 设3个正整数满足$0 < a_1 < a_2 < a_3$, 则存在$2^3 = 8$个整数

$$\sum_{i=1}^{3} t_i a_i = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

(其中t_1、t_2、t_3取1或-1)中, 问: 至少存在多少个不同的整数?

理性实验2: 解抽象题思维受阻, 权且借助图表. 首先可知存在$2^3 = 8$个整数. 这是由于t_i只取1或-1, 因此, 在2种不同元素里取3个元素的所有可以重复的排列的种数是2^3, 这能从树形图得出:

```
        +1 < +1
       /     -1
  +1 <
       \     +1
        -1 < -1

        +1 < +1
       /     -1
  -1 <
       \     +1
        -1 < -1
```

理性实验3: 孤立逐个构作新数, 然后将此按大小排序.

令最小数为$a = -\sum\limits_{i=1}^{3} a_i = -a_1 - a_2 - a_3$, 最大数为$\sum\limits_{i=1}^{3} a_i$, 于是:

$$\underset{1个}{a} < \underbrace{a + 2a_1 < a + 2a_2 < a + 2a_3}_{3个}$$
$$< \underbrace{a + 2a_3 + 2a_1 < a + 2a_3 + 2a_2}_{2个}$$
$$< \underbrace{a + 2a_3 + 2a_2 + 2a_1}_{1个}$$
$$= a + 2\sum_{i=1}^{3} a_i = a_1 + a_2 + a_3 \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

理性实验4: 观察(3)式, 得$1 + 3 + 2 + 1 = 7$个数, 是各不相同的数, 且这些数都是在(2)中的数, 由于$a + 2a_1 + 2a_2$与$a + 2a_3$可能相等, 因此实验结论: 至少有7个不同的整数. 其奇、偶性随着a的奇偶性而定.

发现1 琢磨规律. 设$a = -\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, 则

$$\begin{aligned}
&a = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) && 1个\\
&\left.\begin{aligned}&< a + 2a_1\\ &< a + 2a_2\\ &< \cdots\\ &< a + 2a_n\end{aligned}\right\} && n个\\
&\left.\begin{aligned}&< a + 2a_n + 2a_1\\ &< a + 2a_n + 2a_2\\ &< \cdots\\ &< a + 2a_n + 2a_{n-1}\end{aligned}\right\} && n-1个\\
&\left.\begin{aligned}&< a + 2a_n + 2a_{n-1} + 2a_1\\ &< a + 2a_n + 2a_{n-1} + 2a_2\\ &< \cdots\\ &< a + 2a_n + 2a_{n-1} + 2a_{n-2}\end{aligned}\right\} && n-2个\\
&< \cdots\\
&\left.\begin{aligned}&< a + 2a_n + \cdots + 2a_3 + 2a_1\\ &< a + 2a_n + \cdots + 2a_3 + 2a_2\end{aligned}\right\} && 2个\\
&< a + 2a_n + \cdots + 2a_3 + 2a_2 + 2a_1 && 1个\\
&= a + 2\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (4)
\end{aligned}$$

发现2 琢磨结论: 由于(4)中的每一个整数都是(1)中的数, 且各不相同, 所以至少有$1 + n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2 + n + 2}{2}$个不同的数, 且显然当$a$为奇数或偶数时, (4)中的数与$a$同奇、偶.

综观上文, 所言载体虽仅限于整数问题, 但管中窥豹, 可见一斑; 而本文开头所言16字操作诀, 其实也可概括为两句话:"手段为实验探究, 目标为重在发现".

下文为在玩味数学、玩出创新中值得关注的几个要点:

1. 对学生的创新定位要适当

多篇文章已大同小异提及: 创新需"四不": 不迷信权威, 不人云亦云, 不墨守成规, 不咀嚼剩馍. 但对于学生如何创新呢? 如果定位太高, 力不从心, 挫伤了积极性; 如果定位太低, 放弃追求, 丧失了进取性. 因此, 是否学生的创新只要"三点滴": 寻找问题有点滴新发现(如例1数阵中总数和的面积求法); 解决问题有点滴新思路(如例2中将球配对两两捆绑处理, 例3中

利用映射、序偶处理); 延拓问题有点滴新进展(如例4的寻找规律, 延拓结论).

我们切莫小看这貌似"不显眼"的点滴. 跳一跳, 摘下果子一只只, 聚集就成一框框.

2. 对加强逻辑推理的重视要适度

回顾历史, 1963年数学教学大纲首次提出培养"三大能力", 到了1978年又增加了"逐步培养学生分析问题、解决问题的能力", 2002年又将原"逻辑思维能力"改为"数学思维能力", 这一修改, 决非搞文字游戏, 而是事关本质; 一次次的修改, 认识上一次次的升华.

事实上, 除了逻辑推理外, 还有归纳推理以及类比推理, 虽然归纳和类比仅是合情(即似真)推理, 但却是发现真理的重要手段. 本文中例1使用了类比, 例2、3、4使用了归纳而屡奏凯歌, 即是佐证. 由此可见: 逻辑推理不应成为一枝独秀.

当然, 至此话又得说回来. 理性实验也仅能表面解决一个"疑"字. 唐诗中有"…疑是地上霜…", 见光疑霜, 得出猜想, 通过"举头"(望月), 否定猜想为真, 并诱发联想(故乡). 而在数学上对于"疑"的彻底解决还靠"证明". 因此必是演绎与非演绎的有机结合.

3. 对形式化的符号语言要适应

由于素质教育的核心是创新, 而创新的源泉是实践, 因此, 到了高中数学仍不应排斥使用实验, 当然, 思维层次与小学、初中不同, 而是偏重理性实验.

这里, 需要防止惯性滑坡: 习惯了实验, 懒惰了思维; 习惯了形象, 陌生了抽象, 从一个极端滑到了另一个极端.

事实上, 创新路上往往最大障碍是形式化的符号语言, 而这却是不得不攻克的一个堡垒. 在数学教学中, 虽然不能处处讲究形式化, 这不可能, 也不必要, 非形式化应当有其一席之地, 但是, 数学的发展靠的是形式化. 由于对数学的研究, 归结为对各模式的研究, 而对模式的研究又归结为对各形式化符号语言的研究, 因此, 对于数学中适度形式化的符号语言必须化大力气去适应它、掌握它, 否则数学学习将寸步难行.

4. 与玩味数学相应的教学方法要适合

所谓适合, 大体上指不搞教学一刀切, 不搞授课一言堂, 不搞选题一元化.

为此, 要与因材施教相结合, 这个老口号仍未过时, 例如防止抓了学习优秀生, 丢了学习"晚熟"生, 欲速则不达. 又可与教学民主相结合, 容器可以"灌", 求异思维、发散思维等依靠"诱"; 解题应由仅重结论转为同时也重过程, 重视交流, 师生互动; 此外, 还可与研究性学习、课内与课外相结合, 一般可由教师提出若干课题, 让学生挑选, 课题多元, 利于各类学生分层选题.

参考文献

[1] 2005年全国普通高等学校招生统一考试上海数学试卷与解答要点. 数学教学. 2005年第7期.

[2] 邹一心. 抽象概括能力的培养. 全国二十三省市数学能力培养学术研讨会论文集. P.25. 浙江大学出版社. 1991年.

[3] 张奠宙、邹一心编著. 现代数学与中学数学. P.71. 上海教育出版社. 1990年9月.

[4] 张奠宙、赵小平. 当心"去数学化". 数学教学. 2005年第6期.

[5] 顾泠沅. 现代背景下的数学教育. 数学教学. 1997年第1期.

(上接第12–26页)

得 $\overrightarrow{OG}\perp\overrightarrow{PB}$, 又 $\overrightarrow{PB}=\left(0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}a,-h\right)$, 故 $\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{PB}=\dfrac{1}{6}a^2-\dfrac{1}{3}h^2=0$, $h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$, 所以 $PA=\sqrt{OA^2+h^2}=a$, 即 $k=1$.

反之, 当 $k=1$ 时, 三棱锥 $O-PBC$ 为正三棱锥, 故 O 在平面 PBC 内的射影为 $\triangle PBC$ 的重心.

点评: 空间向量作为一种工具在立体几何中已得到广泛应用, 尤其是对空间线线、线面关系较复杂, 或空间想象能力要求较高, 或具有动态的问题, 更显示它的优越性.

立体几何中的动静交织

312033 浙江省绍兴县鉴湖中学 夏 英

运动与静止是物理学永恒的话题, 唯物辩证法认为运动是绝对的, 静止是相对的. 在作为基础学科的数学领域中, 尤其是立体几何中也普遍存在着绝对运动和相对静止的辩证统一.

在立体几何中我们常常会遇到这样一类问题: 除了固定不变的线线、线面、面面关系外, 还渗透了一些"动态"的点、线、面元素. 这类问题我们称为"动态"问题, 它给静止的立体几何题赋予了"生命"的活力. 同时, 由于"动态"的存在, 也使立几题更趋灵活, 更具挑战性, 从而加强学生的空间想象能力和分析问题能力的培养. 本文从四种不同的角度来探究这类动态问题.

1. 化"动"为"静"

例 1 如图 1, 已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, 点 P 为棱 DD_1 的中点, 且 $AA_1=2AB$. 若点 M 在侧面 BB_1C_1C 及其边界上运动, 并总保持 $AM\perp BP$, 试确定动点 M 的位置.

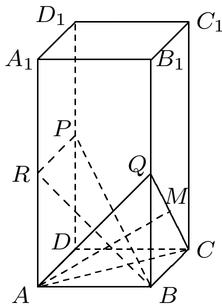


图 1

分析: 由于 M 是动点, 要使 $AM\perp BP$ (AM 为动直线), 问题较难求解, 但在运动中往往存在着有条件的、相对的静止, 不妨来分析一下动直线 AM 所具有的特性, 根据线面垂直的性质容易发现动直线 AM 必在垂直于直线 BP 的平面上, 此平面过定点 A (此平面是定的). 故问题转化为求出过 A 点且与 BP 垂直的截面, 此截面与侧面 BB_1C_1C 的交线即为动点 M 的轨迹.

分析: 由于 M 是动点, 要使 $AM\perp BP$ (AM 为动直线), 问题较难求解, 但在运动中往往存在着有条件的、相对的静止, 不妨来分析一下动直线 AM 所具有的特性, 根据线面垂直的性质容易发现动直线 AM 必在垂直于直线 BP 的平面上, 此平面过定点 A (此平面是定的). 故问题转化为求出过 A 点且与 BP 垂直的截面, 此截面与侧面 BB_1C_1C 的交线即为动点 M 的轨迹.

由正四棱柱性质容易发现 $AC\perp$ 平面 BDD_1B_1, 所以 $AC\perp BP$, 取 BB_1 中点 Q, 取 AA_1 中点 R, 连结 BR、AQ、QC, 因为 $AA_1=2AB$, 所以 $AQ\perp BR$, 又 $PR\perp$ 平面 AA_1B_1B, 根据三垂线定理可得 $AQ\perp BP$, 从而得 $BP\perp$ 平面 AQC, 故当动点 M 在线段 QC 上时, 都有 $AM\perp BP$.

点评: 恩格斯运动观认为:"运动应当从它的反面, 即静止中找到它的度量". 利用三垂线定理、射影定理、线面垂直的性质等在动态问题中提炼一些不变的、"静态"的量, 从而转化为相对静止的量之间的关系问题以达到解题目的, 这是解决立体几何中动态问题的最基本的思想方法.

例2 如图2, 已知矩形 $ABCD$, $PA\perp$ 平面 AC 于点 A, M, N 分别是 AB、PC 的中点, (1) 求证 $MN\perp AB$; (2) 若平面 PDC 与平面 $ABCD$ 所成的二面角为 θ, 能否确定 θ, 使得直线 MN 是异面直线 AB 与 PC 的公垂线? 若能确定, 求出 θ 的值, 若不能确定, 说明理由.

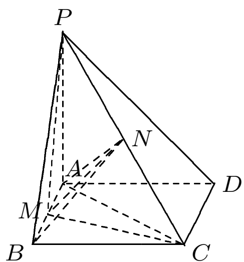


图 2

分析: (1) 连结AN、BN, 根据$PA\perp$平面AC, 底面AC是矩形, 易证$\triangle PAC$和$\triangle PBC$为Rt三角形, 因为N是PC中点, 所以$AN=BN$, 又M是AB中点, 故$AB\perp MN$.

此题也可通过线面垂直来证: 取CD中点H, 可证AB垂直平面MNH, 故$AB\perp MN$.

(2) 由于$PA\perp$平面AC, $CD\perp AD$, 所以$CD\perp PD$, 故$\angle PDA$就是二面角$P-CD-A$的平面角θ (θ为变量), 随着θ的变化, MN与AB的垂直关系不变, 但与PC所成的角将随着变化. 假设能确定θ, 使得直线$MN\perp PC$ (此时θ暂时固定), 连结PM、MC, $\because N$是中点, $\therefore PM=MC$, 易证$\triangle PAM\cong\triangle CBM$, $\therefore AP=BC$, $\because BC=AD$, $\therefore PA=AD$, 此时$\theta=45^\circ$. 可见只要当$\theta=45^\circ$时, MN即为异面直线AB与PC的公垂线.

例3　如图3, 在几何体$ABC-A_1B_1C_1$中, 三角形ABC的面积为S, AA_1、BB_1、CC_1都垂直于平面ABC, 它们的长度分别记为h_1、h_2、h_3, 且它们之和为定值a, 试用a和S的代数式表示此几何体体积.

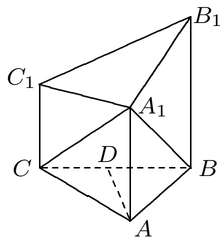


图 3

分析: AA_1、BB_1、CC_1是变动的量, 致使问题很难求解.

但在运动中又包含着暂时的、有条件的相对静止. 不妨暂且固定AA_1, BB_1, CC_1, 然后由已知点A_1, B, C构造辅助平面, 将几何体分割成三棱锥A_1-ABC与四棱锥$A_1-BCC_1B_1$, 由已知易知三棱锥体积为$\dfrac{Sh_1}{3}$. (h_1为变量). 作$AD\perp BC$于D, 易知$AD\perp$平面BCC_1B_1, 因AA_1, BB_1都垂直于平面ABC, 故$AA_1/\!/BB_1$, $AA_1/\!/$平面BCC_1B_1, AD即为点A_1到平面BCC_1B_1的距离. 梯形BCC_1B_1的面积等于$\dfrac{1}{2}BC(BB_1+CC_1)$, $S=\dfrac{1}{2}AD\times BC$, 所以四棱锥体积等于$\dfrac{1}{3}AD\left[\dfrac{1}{2}BC(BB_1+CC_1)\right]=\dfrac{1}{3}S(h_2+h_3)$ (h_2+h_3为变量), 故几何体的体积为 $\dfrac{1}{3}S(h_1+h_2+h_3)=\dfrac{1}{3}Sa$.

点评: 相对静止是事物存在和发展的必要条件. 在解题过程中, 我们常常把有些动态问题看作暂时的、有条件的或相对的静止, 逆向思考, 致使线线、线面等关系较明朗化.

2. 以"动"制"动", 利用极限思想

例4　如图4, 正三棱锥$S-ABC$, 其相邻两侧面所成的二面角为α, 则α的取值范围是$\cdots\cdots$(　)

(A) $(0,\pi)$;　　(B) $\left(\dfrac{\pi}{6},\pi\right)$;

(C) $\left(\dfrac{\pi}{3},\pi\right)$;　　(D) $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

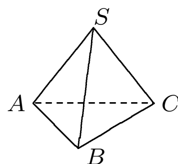


图 4

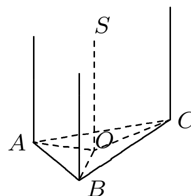


图 5

分析: 此题若设底面边长为x, 侧棱长为y, 作出相邻两侧面所成的二面角α, 利用余弦定理把$\cos\alpha$表示成关于x、y的关系式, 再用代数方法求出$\cos\alpha$的取值范围, 问题显得很复杂, 而且难度较大. 根据正三棱锥的性质, 不妨把底面正$\triangle ABC$固定, O为$\triangle ABC$的中心(O为定点), 若考虑顶点S (S为动点)的两种极限状态, 当S沿射线OS运动, 无限趋近于O点时, 两侧面$\triangle SBC$与$\triangle SAC$逐渐趋向底面的$\triangle BOC$与$\triangle AOC$, 它们所成的二面角大小趋

近π(定值); 当顶点S沿射线OS向无限远运动时(如图5), SA、SB、SC趋向于互相平行且垂直于底面, 则三棱锥趋向正三棱柱, α趋近于$\frac{\pi}{3}$(定值), 故$\frac{\pi}{3}<\alpha<\pi$.

点评: 运用运动观点、极限的思想去观察、分析、处理问题, 可收到意想不到的效果.

3. 引进参数, 利用代数方法

例5 (2004全国高考浙江卷) 如图6, 已知正方形$ABCD$和矩形$ACEF$所在的平面互相垂直, $AB=\sqrt{2}$, $AF=1$, M是线段EF中点.

(1) 求证: $AM/\!/$平面BDE;

(2) 求二面角$A-DF-B$的大小;

(3) 试在线段AC上确定一点P, 使得PF与BC所成的角是60°.

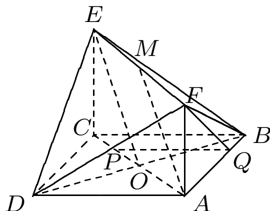


图 6

分析: (1) 记AC与BD的交点为O, 连结EO, 易证$AM/\!/OE$, 从而可得$AM/\!/$平面BDE.

(2) 过A作$AH\perp DF$于H, 连结BH, 由$AB\perp AD$, $AB\perp AF$, 可得$AB\perp$平面ADF, 根据三垂线定理易证$BH\perp DF$, 从而$\angle AHB$即为所求, 易求得其大小为60°.

(3) 要使异面直线BC与PF(动直线)所成的角为60°, 不妨暂且固定P点, 平移定直线BC, 作出异面直线所成的角: 过P作$PQ/\!/BC$交AB于Q, 则$PQ\perp AB$, 且$\angle FPQ$为PF与BC所成的角($\angle FPQ$是变量). 故此问题可转化为当$\angle FPQ=60^\circ$时, 求动点P的位置, 不妨设$PC=x\,(0\leqslant x\leqslant 2)$($x$为参数), 又$\triangle PQA$为等腰直角三角形, 从而$PQ=\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x)$, 由$PQ\perp AB$, $PQ\perp AF$, 得$PQ\perp$平面ABF, $\therefore PQ\perp QF$.

在Rt$\triangle FAP$中, $PF=\sqrt{(2-x)^2+1}$, 若$\angle FPQ=60^\circ$, 则$PF=2PQ$.

即
$$\sqrt{(2-x)^2+1}=2\times\frac{\sqrt{2}}{2}(2-x),$$

$\therefore x=1$或$x=3$(舍去), 即点P是AC中点.

点评: 立体几何题中经常会涉及到角度、距离、面积、体积、最大值、最小值的计算, 很多情况下, 我们可以把这类动态问题转化成目标函数或方程, 从而利用代数方法求解.

4. 利用空间向量, 化难为易

例6 (2005年全国高考浙江卷) 如图7, 在三棱锥$P-ABC$中, $AB\perp BC$, $AB=BC=kPA$, 点O、D分别是AC、PC的中点, $OP\perp$底面ABC.

(1) 求证: $OD/\!/$平面PAB;

(2) 当$k=\frac{1}{2}$时, 求直线PA与平面PBC所成角的大小;

(3) 当k取何值时, O在平面PBC内的射影恰好为$\triangle PBC$的重心?

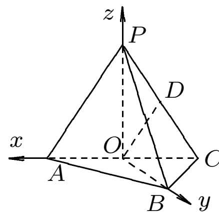


图 7

分析: 此题若用传统方法来解, 则难度较大. 若利用空间向量, 则线线关系、线面关系显得明朗化, 尤其是第(3)小题: 由于$OP\perp$平面ABC, $OA=OC$, $AB=BC$, 所以$OA\perp OB$, $OA\perp OP$, $OB\perp OP$, 以O为原点, 射线OP为非负z轴, 建立空间直角坐标系$O-xyz$, 不妨设$AB=a$(a为参数), 则$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$、$B\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,\right)$、$C\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}a,0,0\right)$.

设$OP=h$(h为参数), 则$P(0,0,h)$. $\triangle PBC$的重心$G\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}a,\frac{\sqrt{2}}{6}a,\frac{1}{3}h\right)$, $\overrightarrow{OG}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{6}a,\frac{\sqrt{2}}{6}a,\frac{1}{3}h\right)$, 由$OG\perp$平面$PBC$

(下转第12–23页)

自由向量在空间四边形中的应用

200011 上海市大同中学 陈兴义

正如文(1)所说:"在我国的中小学教学内容中, 1992年上海编写的'一期教材'是比较早地写入向量知识的, 以向量为工具解决立体几何的方法, 成为解决计算题和证明题的'通性通法', 大大降低了解题的技巧性, 深受广大师生的认可和欢迎."

当时的"一期教材"初步尝试应用向量的内积, 求异面直线所成的角的大小等, 由于启用了一种新的处理方式, 而且思路简洁、有效能算, 所以学生对立体几何的学习, 充满信心、心情愉悦, 不再为"巧添辅助线"而愁眉苦脸.

如今的"二期教材"在"一期教材"的基础上, 又迈出了可喜的一步, 教材又引进了平面的法向量, 这样立体几何中所有的距离和角的问题, 都能通过向量计算得出. 正如吴文俊先生所说: 为了使中学几何"腾飞", 必须采取"数量化"的方法, 也就是要及早地引入坐标, 使几何"解析化", 使几何可以计算. "二期教材"立体几何教材设计正是体现了这样的指导思想..

以往的立体几何问题常常是给出一定的几何条件, 通过逻辑推理、演绎论证得出需要证明的几何结论; 现在应用向量处理立体几何问题, 常把一定的几何条件通过基向量, 转化为向量关系式, 运用向量基本运算即加法、数乘、内积、外积等, 再转化为新的向量关系式, 使得要求的几何结论得以解决.

下面例谈应用自由向量, 来处理空间四边形中的几何问题.

1. 证明空间四边形中三点共线或三线共点问题

例1 如图1, 在空间四边形 $ABCD$ 中, M、N 分别是 AB、CD 的中点, P 是线段 MN 的中点, Q 是 $\triangle BCD$ 的重心, 求证: A、P、Q 三点共线.

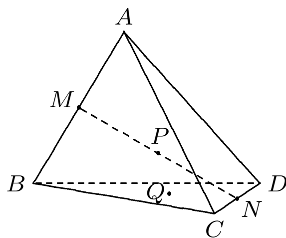


图 1

分析: 在空间合理地选取一组基向量, 将 $\overrightarrow{AP}$ 和 $\overrightarrow{AQ}$ 按此基向量分解, 若能证明 $\overrightarrow{AP}/\!/\overrightarrow{AQ}$, 即证明 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AQ}\,(\lambda\in\mathbf{R})$, 找到实数 λ, 问题得到解决.

证明: $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AB}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{BN}$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$$

$$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left[\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)\right],$$

所以 $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\cdots\cdots$ ①

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\right],$$

所以 $\overrightarrow{AP}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\cdots\cdots$ ②

由于 $\overrightarrow{AB}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AD}$ 是一组不共面向量, 由 ①、② 可得, $\overrightarrow{AQ}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AP}$, 即 $\overrightarrow{AQ}/\!/\overrightarrow{AP}$, 即 A、P、Q 三点共线.

例2 如图2, 在空间四边形 $ABCD$ 中, 点 E、F、G、H、I、J 分别是 AB、DC、BC、AD、AC、BD 的中点, 求证: HG、EF、IJ 相交于一点 O, 且 O 点平分线段 HG、EF、IJ.

解: 设 HG 的中点为 P_1, EF 的中点是 P_2, IJ 的中点是 P_3, 则由已知条件可得,

$$\overrightarrow{AP_1}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right),$$

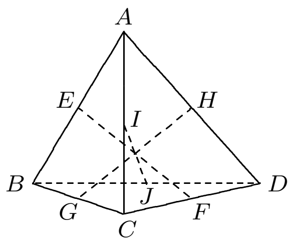


图 2

$\overrightarrow{AP_2}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right)$,

$\overrightarrow{AP_3}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\right)$,

所以$\overrightarrow{AP_1}=\overrightarrow{AP_2}=\overrightarrow{AP_3}$,

即P_1、P_2、P_3重合为一点O.

HG、EF、IJ相交于一点O, 且O点平分线段HG、EF、IJ.

2. 活用向量内积的变形式, 求空间四边形中的角(包括线线成角、线面成角、面面成角)

2.1 判断空间四边形中角的范围问题

例3 如图3, 在空间四边形$ABCD$中, $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAB=90°$, 判断$\triangle BCD$的形状.

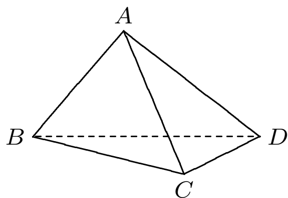


图 3

分析: 在$\triangle BCD$中,

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}>0\Longleftrightarrow\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\rangle\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$;

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}<0\Longleftrightarrow\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\rangle\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$;

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\Longleftrightarrow\langle\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\rangle=\frac{\pi}{2}$.

解: 由已知条件, $\angle BAC=\angle CAD=\angle DAB=90°$, 可得$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,

又因为$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$,

$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)$

$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}$

$+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{AC}|^2>0$,

所以$\angle BCD$是锐角, 同理可得$\angle DBC$和$\angle CDB$都是锐角, 即得$\triangle BCD$是锐角三角形.

2.2 证明空间四边形中线线垂直

例4 如图4, 在空间四边形$PABC$中, $PA\perp PB$, $PB\perp PC$, $PC\perp PA$, $PA=PB=PC=a>0$, G是$\triangle PAB$的重心, E是BC上的一点, $BE:EC=1:2$, 求证: $GE\perp BC$, 且$GE\perp PG$.

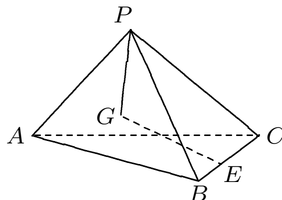


图 4

解: 由题意可得, $PA\perp PB$, $PB\perp PC$, $PC\perp PA$,

所以$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}=0$, 因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}$,

$\overrightarrow{PG}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)$,

$\therefore\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{PE}-\overrightarrow{PG}$

$=\overrightarrow{PB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB}\right)-\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}\right)$,

所以$\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}\right)\cdot(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PB})=0$,

$\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{PG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}\right)\cdot\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)=0$,

从而$GE\perp BC$, 且$GE\perp PG$.

2.3 确定空间四边形中点的位置

例5 如图5, 在空间四边形$OABC$中, OA、OB、BC互相垂直, 且$OA=OB=BC=1$, N是OC的中点, 点M在线段AB上, 且$MN\perp AB$, 判断点M的位置.

解: 设$AM:AB=\lambda:1$, 则

$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{OM}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}+\lambda\overrightarrow{OB}$,

$\overrightarrow{ON}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}\right)$,

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}$

$=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+(\lambda-1)\overrightarrow{OA}-\lambda\overrightarrow{OB}$

$=(\lambda-1)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$,

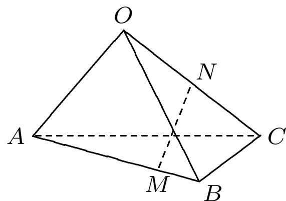


图 5

因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$, $MN\perp AB$,

所以$\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{AB}$, 得

$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{AB}=0$,

即$\left[(\lambda-1)\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{2}-\lambda\right)\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right]\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=0$,

又由$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{BC}|=1$及

$\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\rangle=\langle\overrightarrow{OB},\overrightarrow{BC}\rangle=\langle\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\rangle$

$=90^\circ$,

所以$\frac{1}{2}-\lambda+1-\lambda=0$, 解得$\lambda=\frac{3}{4}$, 得到$AM:AB=3:4$.

2.4 求空间四边形中线线成角大小

例6 如图6, 在空间四边形$SABC$中, $SA=SB=SC=a>0$, $\angle ASB=\angle BSC=\angle CSA=90^\circ$, M、N分别是AB和SC的中点, 求异面直线SM和BN所成角的大小.

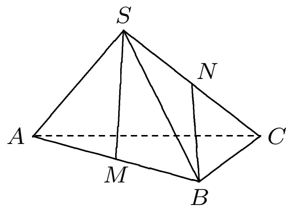


图 6

分析: 求异面直线SM和BN所成角的大小, 只需求出向量$\overrightarrow{SM}$与$\overrightarrow{BN}$所成的角即可. 但是需要注意的是异面直线所成角的范围是$\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$, 两个向量所成角的范围是$[0,\pi]$.

解: 由已知条件可得,

$\overrightarrow{SM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}\right)$,

$\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}$,

又因为$\angle ASB=\angle BSC=\angle CSA=90^\circ$, 得

$\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SA}\cdot\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SC}\cdot\overrightarrow{SB}=0$,

$$\cos\langle\overrightarrow{SM},\overrightarrow{BN}\rangle=\frac{\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{BN}}{|\overrightarrow{SM}|\cdot|\overrightarrow{BN}|}=-\frac{\sqrt{10}}{5}<0,$$

即向量$\overrightarrow{SM}$与$\overrightarrow{BN}$所成角大小为

$\pi-\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$,

所以异面直线SM和BN所成角的大小为$\arccos\frac{\sqrt{10}}{5}$.

2.5 求空间四边形中线面成角大小

例7 如图7, 在空间四边形$SABC$中, $\angle ASB=60^\circ$, $\angle ASC=45^\circ$, $\angle BSC=90^\circ$, 求直线SA与平面SBC所成角的大小.

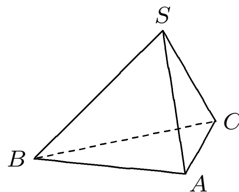


图 7

分析: 求出平面SBC的单位法向量 $\overrightarrow{n_0}=\frac{\overrightarrow{SB}\times\overrightarrow{SC}}{\left|\overrightarrow{SB}\times\overrightarrow{SC}\right|}$, 可知直线$SA$与平面$SBC$所成角的大小为 $\left|\frac{\pi}{2}-\langle\overrightarrow{AS},\overrightarrow{n_0}\rangle\right|$.

解: 由题意可知$\langle\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SB}\rangle=\frac{\pi}{3}$,

$\langle\overrightarrow{SB},\overrightarrow{SC}\rangle=\frac{\pi}{2}$, $\langle\overrightarrow{SA},\overrightarrow{SC}\rangle=\frac{\pi}{4}$,

$$\cos\langle\overrightarrow{AS},\overrightarrow{n_0}\rangle=\frac{\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{n_0}}{|\overrightarrow{AS}|}$$

$$=\frac{\overrightarrow{AS}\cdot\left(\overrightarrow{SB}\times\overrightarrow{SC}\right)}{|\overrightarrow{AS}|\cdot\left|\overrightarrow{SB}\times\overrightarrow{SC}\right|}=\frac{\frac{1}{2}|\overrightarrow{AS}||\overrightarrow{SB}||\overrightarrow{SC}|}{|\overrightarrow{AS}||\overrightarrow{SB}||\overrightarrow{SC}|}$$

$=\frac{1}{2}$,

所以 $\langle\overrightarrow{AS},\overrightarrow{n_0}\rangle=\dfrac{\pi}{3}$, 即直线$SA$与平面$SBC$所成角的大小为$\dfrac{\pi}{6}$.

此外, 类似可求空间四边形中面面成角.

3. 巧用向量内积的变形式, 求空间四边形的距离(两点间距离、点线距离)

例8　如图8, 在空间四边形$OABC$中, 边OA、AB、BC互相垂直, 连接对角线AC、OB, 且有$OA=a$, $AB=b$, $BC=c$, 求边OC的长.

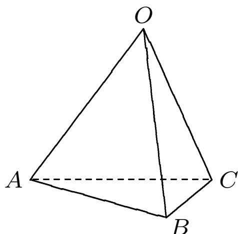


图 8

解: 由题意可得$OA\perp AB$, $AB\perp BC$, $BC\perp OA$,

知$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$,

$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$,

$|\overrightarrow{OC}|^2=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OC}$

$=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)\cdot\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right)$

$=a^2+b^2+c^2$,

所以$|\overrightarrow{OC}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$,

即$OC=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

例9　如图9, 在空间四边形$ABCD$中, 线段DA、DB、DC两两互相垂直, $AD=4$, $DB=6$, $DC=8$, 求点A到直线BC的距离.

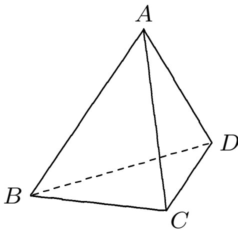


图 9

分析: 求出直线BC的单位方向向量$\overrightarrow{m_0}$, 由向量内积的几何意义可知, $|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{m_0}|$的值是点$B$到经过点$A$作直线$BC$的法向量所在直线的距离, 故点$A$到直线$BC$的距离为

$\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2-|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{m_0}|^2}$.

解: 由已知条件可得,

$\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{DC}=0$,

$|\overrightarrow{BD}|=6$, $|\overrightarrow{DC}|=8$,

$|\overrightarrow{AD}|=4$, $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{52}$, $|\overrightarrow{BC}|=10$,

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}$,

$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{m_0}=\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\right)\cdot\dfrac{\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}$

$=\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\right)\cdot\dfrac{\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}\right)}{10}$

$=\dfrac{18}{5}$,

所以点A到直线BC的距离为

$\sqrt{52-\dfrac{324}{25}}=\dfrac{4\sqrt{61}}{5}$.

此外, 类似可求空间四边形中线线距离、线面距离及点面距离等.

利用空间自由向量求解空间四边形中与点、线、面有关的角、距离、线段长、共点、共线等问题, 关键是恰当地选取基向量, 将相关向量用选取的基向量线性表示, 将所求问题转化为向量的基本运算, 通过向量相等、平行、内积、外积的充要条件, 及内积和外积的几何意义等, 来处理立体几何中的问题.

“二期教材”先让学生学会运用正交的基向量处理立体几何问题, 从学生的最近发展区设计教材, 在阅读材料中写了向量的外积, 供学生阅读. 阅读材料相当于打开了一扇小窗, 使一部分学有余力的学生, 自主学习外积, 应用外积求面积, 点积对外积的混合积求体积, 钻研用自由向量处理立体几何中的问题. 当然, 一般说来, 解决一些问题使用向量的坐标法可能更简单或更容易被人接受, 因而使用也较为普遍. 然而, 这并非绝对的, 两种方法究竟使用哪种更简捷, 应视不同情况而定. 这样立体几何的所有问题, 用向量就都可以处理了.

参考文献

[1] 赵小平. 把空间向量融入立体几何教学的一种教材设计. 数学教学. 2005年第五期.

[2] 吴文俊. 数学教育现代化问题. 数学通报. 1995年第二期.

“函数迭代”与“一阶线性递推数列”关系探析

312008 浙江省绍兴鲁迅中学 虞关寿

背景材料:李政道博士在一次访问中国时给学生们出了这样一个问题:五只猴子分一堆桃,分了一天可怎么分也分不均,于是猴子们决定今晚先睡觉,明天再说. 夜里一只猴子偷偷起来,把一只桃子吃掉后正好可以分成五份,又拿掉一份后去睡觉了. 第二只猴子起来后,像第一只猴子一样,先吃掉一只,剩下的又刚好分成五份,也拿掉一份睡觉去了. 第三、第四、第五只猴子也都按同样的方法操作. 问:这堆桃子最少是多少个?

问题求解:这个问题可以如下来解:若设桃子的总数为x只,第n个猴子吃掉一个并拿走一份后,剩下的桃子数目为x_n个. 设$f(x)=\frac{4}{5}(x-1)=\frac{4}{5}(x+4)-4$,则$x_1=f(x)=\frac{4}{5}(x+4)-4$;由于第二只猴子重复第一只猴子的动作,故把$x_1$代入$f(x)=\frac{4}{5}(x+4)-4$得 $x_2=f(x_1)=f[f(x)]=\frac{4}{5}\left[\frac{4}{5}(x+4)-4+4\right]-4=\left(\frac{4}{5}\right)^2(x+4)-4$;类似的,有$x_3=f[f(f(x))]=\left(\frac{4}{5}\right)^3(x+4)-4$,$x_4=f[f(f(f(x)))]=\left(\frac{4}{5}\right)^4(x+4)-4$,$x_5=f[f(f(f(f(x))))]=\left(\frac{4}{5}\right)^5(x+4)-4$. 由于剩下的桃子数都是整数,所以$x+4$应被$5^5$整除,因此最小的$x$为$5^5-4=3121$.

解法剖析:上面的这一解法出现了一个函数自身复合多次的现象,即为我们熟悉的函数的迭代问题,上述解法就是采用了函数迭代的方法解决的. 但从$x_1,x_2,x_3,x_4,\cdots$的表达式来看,可得到如下关系式$x_n=\frac{4}{5}(x_{n-1}+4)-4$,即$x_n=\frac{4}{5}x_{n-1}-\frac{4}{5}$,即出现了形如$a_{n+1}=Aa_n+B$($A$、$B$为常数)的数列递推形式. 这样上述解法又可认为是利用数列递推关系解决的,所以本题隐含着函数的迭代与数列递推之间的有机统一的关系. 本文拟通过具体的例子来探析两者之间的这种关系. 先介绍两个定义:

定义1 (函数迭代) 一般地,设函数$y=f(x)$,$x\in D$,$y\in D$,对任意的$x\in D$,记$f^{(0)}(x)=x$;$f^{(1)}(x)=f(x)$;$f^{(2)}(x)=f(f(x))=f(f^{(1)}(x))$;$f^{(3)}(x)=f(f(f(x)))=f(f^{(2)}(x))$;$\cdots$;$f^{(n)}(x)=\underbrace{f(f\cdots(f(x))\cdots)}_{n个}=f(f^{(n-1)}(x))$. 则称$f^{(n)}(x)$为$f(x)$的$n$次迭代,并称$n$为迭代指数.

定义2 (一阶线性递推数列) 一般地,对于数列$\{a_n\}$满足下列条件:① $a_1=a$(为常数);② 当$n\geqslant 2$时,$a_n=f(a_{n-1})$,我们把数列$\{a_n\}$称为一阶递推数列. 特别地若$a_n=Aa_{n-1}+B$(A、B为常数),则我们把数列$\{a_n\}$称为一阶线性递推数列.

关系探析:由函数迭代的定义:

$$f^{(0)}(x)=x;$$

$$f^{(n)}(x)=\underbrace{f(f\cdots(f(x))\cdots)}_{n个}=f(f^{(n-1)}(x)).$$

现令$a_1=f^{(0)}(x)$,$a_n=f^{(n)}(x)$,则可得$a_n=f(a_{n-1})$,就变成了数列的一阶递推关系;若“f”表示的是一次函数,则又成了一阶线性递推关系. 反之,由一阶线性递推关系:$a_1=a$(为常数);当$n\geqslant 2$时,$a_n=Aa_{n-1}+B$(A、B为常数),令$a_n=f(a_{n-1})$,就变成了函数迭

代问题. 所以, 涉及函数迭代问题可以把它转化到数列问题去解决; 碰到一阶线性递推的数列问题又可用函数迭代的思想方法去操作.

应用举例:

例1　按下列程序框图来计算, 如果 $x=5$, 那么应该计算几次才停止呢?

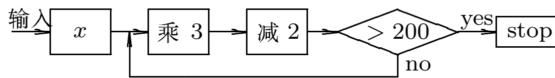


图 1

解一: 这个问题实际上是一个简单的迭代问题. 输入 x; 第一次输出: $3x-2$; 第二次输出: $3(3x-2)-2=9x-8$; 第三次输出: $3(9x-8)-2=27x-26$; 第四次输出: $3(27x-26)-2=81x-80$; $\cdots$; 显然, 每一次输出的数值都是后一次输入的数值. 令 $f_0=x$, $f_1(x)=3x-2$, 则得 $f_n=f(f_{n-1})$. 如果计算结果 $f_n>200$, 那么就停止计算并输出结果; 否则, 将继续重复运算. 本题通过计算, 容易得到第四次输出时的数值等于325, 大于200, 因此只要运算四次就会停止.

解二: 这个问题也可以看成一个数列问题. 设 $a_1=x$, 由程序的要求得 $a_{n+1}=3a_n-2\,(n\in\mathbf{N}^*)$. 这样可把问题转化成数列问题去解, 下面按数列方法来解答. 由式子 $a_{n+1}=3a_n-2$, 变形可得: $a_{n+1}-1=3(a_n-1)$, 故数列 $\{a_n-1\}$ 是以 $a_1-1=4$ 为首项, 3为公比的等比数列, 易得 $a_n=4\times3^{n-1}+1$, 由题知若 $a_n>200$, 可得 $n\geqslant5$, 所以只要运算四次就会停止.

例2　已知 $f(x)$ 是一次函数, 且 $f^{(10)}(x)=1024x+1023$, 求 $f(x)$ 的解析式.

解一: 设 $f(x)=ax+b$, 令 $f^{(1)}(x)=ax+b$, 由函数迭代关系易得 $f^{(2)}(x)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$; $\cdots$; $f^{(10)}(x)=a^{10}x+(1+a+a^2+\cdots+a^9)b$,

$$\therefore\begin{cases}a^{10}=1024,\\(1+a+a^2+\cdots+a^9)b=1023,\end{cases}$$

解之可得 $\begin{cases}a=2,\\b=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\b=-3.\end{cases}$ 因此, 所求的一次函数为 $f(x)=2x+1$, 或 $f(x)=-2x-3$.

解二: 设 $f(x)=ax+b$, 令 $a_1=f^{(1)}(x)=ax+b$; 则 $a_2=f^{(2)}(x)=a\cdot a_1+b$; $\cdots$; $a_n=f^{(n)}(x)=a\cdot a_{n-1}+b$. 设 $a_n+t=a(a_{n-1}+t)$, 对比前式可求得 $t=\dfrac{b}{a-1}$ (这里 $a\neq1$, 不然就不符合题给条件). 从而可知数列 $\left\{a_n+\dfrac{b}{a-1}\right\}$ 是以 $a_1+\dfrac{b}{a-1}$ 为首项, a 为公比的等比数列, 可求得通项式为 $a_n+\dfrac{b}{a-1}=\left(a_1+\dfrac{b}{a-1}\right)\cdot a^{n-1}$, 即 $a_n=a^nx+\dfrac{a^nb}{a-1}-\dfrac{b}{a-1}$. $\therefore a_{10}=a^{10}x+\dfrac{a^{10}b}{a-1}-\dfrac{b}{a-1}=1024x+1023$, 得

$$\begin{cases}a^{10}=1024,\\\dfrac{a^{10}b}{a-1}-\dfrac{b}{a-1}=1023,\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}a=2,\\b=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-2,\\b=-3.\end{cases}$ 因此, 所求的一次函数为 $f(x)=2x+1$, 或 $f(x)=-2x-3$.

例3　(2003年希望杯数学竞赛题) 在数列 $\{x_n\}$ 中, $x_1=\dfrac{1}{3}$, $x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{2x_n+1}$, 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式.

解一: 由 $x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{2x_n+1}$, 得 $\dfrac{1}{x_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x_n}+1$, 设 $a_n=\dfrac{1}{x_n}$, 则 $a_1=3$, $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+1$, 变形可得 $a_{n+1}-2=\dfrac{1}{2}(a_n-2)$, 可知数列 $\{a_n-2\}$ 是首项为 $a_1-2=1$, 公比为 $\dfrac{1}{2}$ 的等比数列, $\therefore a_n-2=(a_1-2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$, $\therefore a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+2$. 即可得 $x_n=\dfrac{2^{n-1}}{2^n+1}$.

解二: 由 $x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{2x_n+1}$, 得 $\dfrac{1}{x_{n+1}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{x_n}+1$, 记 $f^{(n)}(x)=\dfrac{1}{x_n}$, 则

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=\frac{1}{2}f^{(n-1)}(x)+1\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}f^{(n-2)}(x)+1\right]+1\end{aligned}$$

$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\lambda\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$中 λ的取值范围

444200 湖北省远安县第一高级中学 王宏梅

在学完向量一章后, 我给学生出了一道思考题:

题目: 两个非零向量 $\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$ 的夹角为$60°$, 试问$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$能否等于 $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$的2倍?

对于这个问题, 同学们联想向量加减法的几何意义, 迅速转化为研究平行四边形两条对角线的长度关系. 在此之前已经证明过:

$$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|^2+\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2$$
$$=2\left(|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2\right),$$

它反映的是平行四边形两条对角线的长度与边长的关系. 由此一开始就在同学们中有如下三种不同观点.

观点1: 只已知平行四边形的内角, 没有确定边的关系, 所以平行四边形的形状没有确定, 两条对角线的关系也应该是任意的, 因此$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$能够等于 $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$的2倍.

观点2: 利用有关性质得 $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2+|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$及 $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\sqrt{|\overrightarrow{a}|^2+|\overrightarrow{b}|^2-|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}$, 因为没有给定

$$=\frac{1}{2^2}f^{(n-2)}(x)+\frac{1}{2}+1$$
$$=\frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{2}f^{(n-3)}(x)+1\right]+\frac{1}{2}+1$$
$$=\frac{1}{2^3}f^{(n-3)}(x)+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}+1$$
$$=\cdots$$
$$=\frac{1}{2^{n-1}}f^{(1)}(x)+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-3}}+\cdots+\frac{1}{2}+1,$$

$\because f^{(1)}(x)=\dfrac{1}{x_1}=3,$

$$\therefore f^{(n)}(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\times 3+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}$$
$$=\frac{3}{2^{n-1}}+2-\frac{2}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}+2$$
$$=\frac{1+2^n}{2^{n-1}},$$

$\therefore x_n=\dfrac{2^{n-1}}{2^n+1}.$

例4 已知$f_1(x)=\dfrac{2}{1+x}$, $f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)](n=1,2,3,\cdots)$, 求满足$\left|\dfrac{f_n(0)-1}{f_n(0)+2}\right|<\dfrac{1}{9}$的自然数$n$的范围.

分析: 由于题意与自然数n有关, 且注意到题设中有$f_{n+1}(x)=f_1[f_n(x)]$这样的式子出现, 所以考虑把问题转化成数列递推问题, 利用递推关系求通项.

解: 当$n\geqslant 2$时, $f_n(x)=\dfrac{2}{1+f_{n-1}(x)}$, $f_n(0)=\dfrac{2}{1+f_{n-1}(0)}$, 进而有$f_n(0)-1=\dfrac{2}{1+f_{n-1}(0)}-1=\dfrac{1-f_{n-1}(0)}{1+f_{n-1}(0)}$; $f_n(0)+2=\dfrac{2(f_{n-1}(0)+2)}{1+f_{n-1}(0)}$; 两式相比得$\left|\dfrac{f_n(0)-1}{f_n(0)+2}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{f_{n-1}(0)-1}{f_{n-1}(0)+2}\right|$. 由此可知数列$\left\{\left|\dfrac{f_n(0)-1}{f_n(0)+2}\right|\right\}$是以$\left|\dfrac{f_1(0)-1}{f_1(0)+2}\right|=\dfrac{1}{4}$为首项, $\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列. 即可得$\left|\dfrac{f_n(0)-1}{f_n(0)+2}\right|=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$. 由$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}<\dfrac{1}{9}$, 解得$n\geqslant 3$. 故所求自然数的范围为$n\geqslant 3$.

$|\overrightarrow{a}|$与$|\overrightarrow{b}|$的关系, 所以问题的判断缺少条件, 故不能确定.

观点3: 这是一个存在性探索问题, 应该用假设存在法——当存在时, 或者假设否定法——当不存在时解答之后再下结论.

持有观点1或2的同学在观点3的启发下认识了思维上的不严密性, 并在讨论中得出了下面几种解法.

解法1: 假设$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=2\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$, 则根据向量数量积的性质有$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)^2=4\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)^2$, 展开整理得 $3\overrightarrow{a}^2+3\overrightarrow{b}^2-10\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}=0$, 由$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$夹角为$60^\circ$, 得

$3|\overrightarrow{a}|^2+3|\overrightarrow{b}|^2-5|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|=0\cdots\cdots(*)$

进而变形为 $3\left(|\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|\right)^2=-|\overrightarrow{a}|\cdot|\overrightarrow{b}|$, 显然此式不能成立, 即假设错误,

故$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|\neq2\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$.

解法2: 大致同解法1, 假设$|\overrightarrow{a}|=t|\overrightarrow{b}|$, $(t>0)$, 将$(*)$变形为$3t^2-5t+3=0$.

因该方程无解, ∴ 假设不成立.

故$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|\neq2\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$.

解法3: 假设$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\lambda\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$, $(\lambda>0,\ \lambda\neq1)$, (因为$\lambda=1$时$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$与条件不符), 且设$|\overrightarrow{a}|=t|\overrightarrow{b}|$, $(t>0)$, 则有$\left(\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right)^2=\lambda^2\left(\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right)^2\Longrightarrow(\lambda^2-1)|\overrightarrow{a}|^2-(\lambda^2+1)|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|+(\lambda^2-1)|\overrightarrow{b}|^2=0$, 将$|\overrightarrow{a}|=t|\overrightarrow{b}|$代入得 $(\lambda^2-1)t^2-(\lambda^2+1)t+(\lambda^2-1)=0$. 根据这个关于$t$的方程有正根得$1<\lambda\leqslant\sqrt{3}$, 而$2\notin(1,\sqrt{3}]$, 故$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|\neq2\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$.

从解法3中, 大家明确了解法1、2中产生矛盾的原因, 也知道了在两个非零向量$\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{b}$的夹角为60°情况下, 无论$|\overrightarrow{a}|$与$|\overrightarrow{b}|$关系如何, $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|$均不可能等于 $2\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$. 至此, 解法3还激发了同学们探究的欲望, 想弄清楚$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\lambda\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$中的$\lambda$取值与两个向量的夹角$\theta$到底有什么关系? 于是, 展开了下面一般性的讨论.

一般地, 设两个向量的夹角为θ, $|\overrightarrow{a}|=t|\overrightarrow{b}|$, $(t>0)$, 当$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时,

假设$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\lambda\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$, $(\lambda>0,\ \lambda\neq1)$, ($\lambda=1$时$\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$), 两边平方, 并将$|\overrightarrow{a}|=t|\overrightarrow{b}|$, $(t>0)$代入整理得 $(\lambda^2-1)t^2-2(\lambda^2+1)t\cos\theta+(\lambda^2-1)=0$, 此方程有两个正根,

$$\therefore\begin{cases}\Delta=4(\lambda^2+1)^2\cos^2\theta\\ \qquad-4(\lambda^2-1)^2\geqslant0,\\ t_1+t_2=\dfrac{2(\lambda^2+1)\cos\theta}{\lambda^2-1}>0,\end{cases}\qquad(**)$$

若$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, 则由$(**)$得

$$\begin{cases}\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\\ \lambda>1\end{cases}$$

$$\Longrightarrow1<\lambda\leqslant\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}.$$

若$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, 则由$(**)$得

$$\begin{cases}0<\lambda<1\\ \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\leqslant\lambda\leqslant\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\leqslant\lambda<1.$$

当$\theta=0$时, $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$, $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=\left||\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|\right|$, 有$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|>\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$, ∴ $\lambda>1$.

当$\theta=\pi$时, $\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\left||\overrightarrow{a}|-|\overrightarrow{b}|\right|$, $\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|=|\overrightarrow{a}|+|\overrightarrow{b}|$, 有$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|<\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$, ∴ $0<\lambda<1$.

综上得$\left|\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\right|=\lambda\left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|$中的$\lambda$的取值只与两个向量的夹角$\theta$有关, 且有下面的结论:

当$\theta=0$时, $\lambda\in(1,+\infty)$;

当$\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时, $\lambda\in\left(1,\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}\right]$;

当$\theta=\frac{\pi}{2}$时, $\lambda=1$;

当$\theta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$时, $\lambda\in\left[\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta},1\right)$;

(下转封底)

再谈$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$公式的导出

200023 上海市卢湾高级中学 陈立强

文[1]给出$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$公式的四种求法, 文[2]就文[1]的面积法再介绍三种构造方法. 笔者深受启发, 现再给出几种证明方法.

1. 逆序相加法

回顾我们在推导等差数列前n项和公式时, 利用逆序相加法, 这是一种非常重要的方法, 它对推导$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$的公式也是奏效的.

由$S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+(n-1)^3+n^3$, 逆序写出$S_n$,

得$S_n=n^3+(n-1)^3+\cdots+2^3+1^3$,

则$2S_n=(1^3+n^3)+[2^3+(n-1)^3]+\cdots+[(n-1)^3+2^3]+(n^3+1^3)$.

当$k=1, 2, \cdots, n$时, $k^3+(n+1-k)^3=(n+1)[k^2-k(n+1-k)+(n+1-k)^2]=(n+1)[3k^2-3(n+1)k+(n+1)^2]$,

$$\begin{aligned}\therefore\ 2S_n&=(1^3+n^3)+[2^3+(n-1)^3]+\cdots\\&\quad+[(n-1)^3+2^3]+(n^3+1^3)\\&=(n+1)[3(1^2+2^2+\cdots+n^2)-3(n\\&\quad-3(n+1)(1+2+\cdots+n)+(n+1)^2\times n]\\&=(n+1)\left[3\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right.\\&\quad\left.-3(n+1)\frac{n(n+1)}{2}+n(n+1)^2\right]\\&=\frac{1}{2}n^2(n+1)^2,\end{aligned}$$

$$\therefore\ S_n=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

2. 构造法

构造金字塔形的数表(如图1所示),

其中第k行有$2k-1\,(k=1, 2, \cdots, n)$个数, 分别为$1\times k, 2\times k, \cdots, (k-1)\times k, k^2, (k-1)\times k, \cdots, 2\times k, 1\times k$,

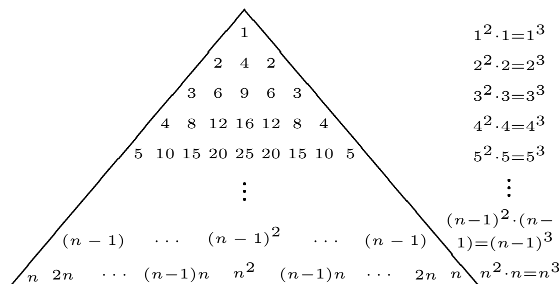


图 1

则第k行所有数字之和为

$1\times k+2\times k+\cdots+(k-1)\times k+k^2+(k-1)\times k+\cdots+2\times k+1\times k=2(1\times k+2\times k+\cdots+k^2)-k^2=2k(1+2+\cdots+k)-k^2=2k\dfrac{k(k+1)}{2}-k^2=k^3$.

所以塔中所有的数字之和为

$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=S_n$.

再根据金字塔的对称性,

$$S_n=(1^2+2^2+\cdots+n^2)+2[(2+3+\cdots+n)+(6+8+10+\cdots+2n)+(12+15+\cdots+3n)+\cdots+(n-1)n]=x+2y, \quad ①$$

其中$x=1^2+2^2+\cdots+n^2$,

$$\begin{aligned}y&=(2+3+\cdots+n)+(6+8+10+\cdots+2n)+(12+15+\cdots+3n)+\cdots+(n-1)n\\&=1\times(2+3+\cdots+n)+2\times(3+4+5+\cdots+n)+3\times(4+5+\cdots+n)+\cdots+(n-1)n\\&=1\times(1+2+3+\cdots+n)+2\times(1+2+3+4+5+\cdots+n)+3\times(1+2+3+4+5+\cdots+n)+\cdots+(n-1)\,[1+2+3+\cdots+(n-1)+n]-1\times1-2\times(1+2)-\cdots-(n-1)[1+2+3+\cdots+(n-1)]\\&=(1+2+\cdots+n)\times[1+2+\cdots+(n-1)]-\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=1}^{i}j\right)\end{aligned}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{(n-1)n}{2}-\sum_{i=1}^{n-1}\left[i\frac{i(i+1)}{2}\right]$$
$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)(n-1)-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}(i^3+i^2)$$
$$=\frac{1}{4}n^2(n+1)(n-1)-\frac{1}{2}(S_n-n^3+x-n^2),$$

把该式代入①, $S_n=x+2\left[\frac{1}{4}n^2(n+1)(n-1)-\frac{1}{2}(S_n-n^3+x-n^2)\right]$,

$$S_n=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2.$$

3. 迭加归纳法

列表

n	1	2	3	4	5	6	7	8	$\cdots$	n
n^3	1	8	27	64	125	216	343	512	$\cdots$	n^3
S_n	1	9	36	100	225	441	784	1296	$\cdots$	
$\sqrt{S_n}$	1	3	6	10	15	21	28	36	$\cdots$	
$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}$	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$	$n+1$

根据上表S_n的前几个值我们完全有理由猜测S_n是一个与n有关的完全平方数, 为此我们只需要考虑$\sqrt{S_n}$的情形. 经过仔细观察$\{\sqrt{S_n}\}$组成的数列: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, $\cdots$, 猜测$\{\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\}$构成等差数列, 且$\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}=n+1$, 即$\{\sqrt{S_n}\}$为二阶等差数列.

$\therefore\ \sqrt{S_2}-\sqrt{S_1}=2,$

$\sqrt{S_3}-\sqrt{S_2}=3,$

$\sqrt{S_4}-\sqrt{S_3}=4,$

$\cdots,$

$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=n,$

迭加得$\sqrt{S_n}-\sqrt{S_1}=2+3+\cdots+n,$

$\therefore\ \sqrt{S_n}=1+2+3+\cdots+n$, 即$S_n=(1+2+3+\cdots+n)^2=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, 再用数学归纳法证明.

4. 面积法

如图2所示, 我们先构造一个这样的图形, 从左到右, 依次出现面积分别为$1^2, 2^2, 3^2, \cdots, n^2$的正方形, 而且它们的个数分别为1, 2, 3, $\cdots$, n. 其中图形排列规则是这样的: 排好i ($i=1, 2, \cdots, n-1$)个边长为i的正方形后(如图3左侧实线部分), 再如图3的右侧排边长为$i+1$的正方形. 从而可知图2中所有正方形(边长分别为1, 2, 3, $\cdots$, n)的面积之和为$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=S_n$, 而四个与图2完全一样的图形恰好可以组成一个边长为$n(n+1)$的大正方形, 它的面积为$[n(n+1)]^2$.

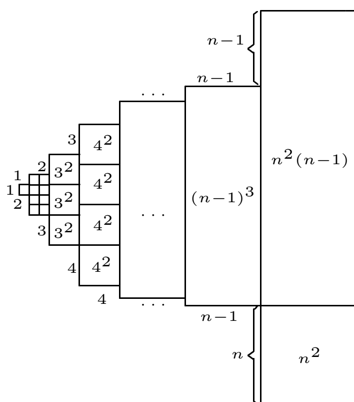


图 2

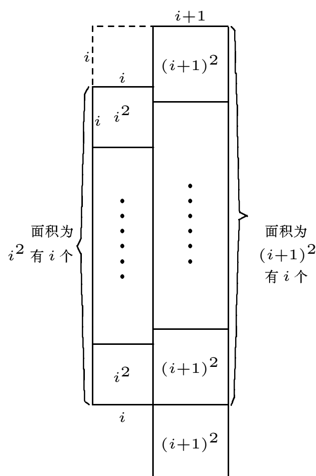


图 3

譬如当$n=2$时, 如图4所示是用阴影(就是我们按照上述的规则构造出来的图形所对应的部分, 下同)将一个大正方形分成四个部分, 每一部分中的小正方形的个数为1^3+2^3(每小

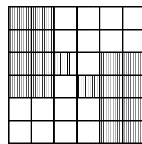


图 4

格的面积为1, 个数大小就是面积大小), 容易

使用平面向量基本定理探讨一道联赛题

410007 湖南省长沙市第十五中学 厉 倩

2004年全国高中数学联赛第4题为: 设O点在$\triangle ABC$内部且有$\overrightarrow{OA}+2\cdot\overrightarrow{OB}+3\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 则$\triangle ABC$的面积与$\triangle AOC$的面积的比为……( )

(A) 2; (B) $\dfrac{3}{2}$; (C) 3; (D) $\dfrac{5}{3}$.

向量是高中数学新增内容, 在全国高中数学联赛中第一次出现, 本文用平面向量基本定理在不要求O在$\triangle ABC$内部的条件下推广命题并简证有关结论, 同时也挖掘平面向量基本定理的教学价值.

平面向量基本定理: 如果$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$是同一平面内的两个不共线向量, 那么对于这一平面内的任一向量$\overrightarrow{a}$, 有且只有一对实数λ_1、λ_2, 使$\overrightarrow{a}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}$.

例1 设O、A、B三点不共线, 点P在直线AB上的充要条件是存在实数x、y, 使$\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}$并且$x+y=1$(由文[4]中例5改编).

证明: 仿[4]中例5易证(从略).

定理1 若O、A、B三点不共线, k为实常数($k\neq 1$), 记$L=\{P|\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}$且$x+y=k\}$, 则点集$L$表示平行$AB$的直线, 特别$k=0$时, L经过O点.

证明: 如图1, 令$\overrightarrow{OC}=k\cdot\overrightarrow{OB}$, 则点$C$随之确定, 又$\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}=x\cdot\overrightarrow{BA}+k\cdot\overrightarrow{OB}=x\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{OC}$, 则$\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}=x\cdot\overrightarrow{BA}$, $\therefore CP/\!/BA$, 当x在实数集内变动时, 点P的集合L即表示过点C且平行AB的直线. 显然$k=0$时, C与O重合, 故L经过O点.

知道大正方形的面积为$(2\times 3)^2$, 即有等量关系$4(1^3+2^3)=(2\times 3)^2$.

同理, 图5和图6刻画的等量关系分别为:

$4(1^3+2^3+3^3)=(3\times 4)^2$和$4(1^3+2^3+3^3+4^3)=(4\times 5)^2$.

因此对一般的n, 我们总有$4S_n=[n(n+1)]^2$, 也就是$S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{1}{4}[n(n+1)]^2$.

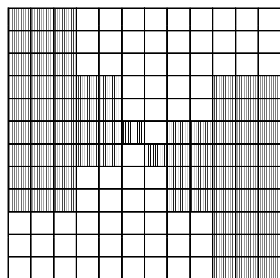


图 5

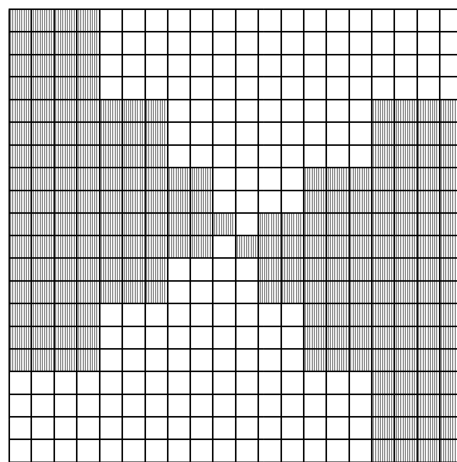


图 6

参考文献

1. 严惠风. 导出公式$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$的四种方法. 数学教学. 2004年第6期.

2. 谭雄姿. 也谈$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$公式的导出. 数学教学. 2005年第5期.

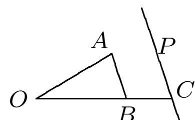


图 1

定理2 若O、A、B三点不共线, 直线$l /\!/ AB$, 则存在某实常数k, 使得对任意$P\in l$, 都有惟一确定的有序实数对(x,y)满足$\overrightarrow{OP}=x\cdot\overrightarrow{OA}+y\cdot\overrightarrow{OB}$并且$x+y=k$.

证明: 仿定理1易证(从略).

联赛题的推广:

推广1: 设O点在$\triangle ABC$内部且有$m\cdot\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}+r\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 则$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle AOC}=|m+n+r|:|n|$.

证明: 由已知可证此时必有$m+n+r\neq 0$. 有$m(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA})+n\cdot\overrightarrow{OB}+r(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC})=\overrightarrow{0}$, 变形得

$$\overrightarrow{BO}=\frac{m}{m+n+r}\overrightarrow{BA}+\frac{r}{m+n+r}\overrightarrow{BC},$$

由定理1知$k=\dfrac{m+r}{m+n+r}$, 则O点在AC的平行线A_1C_1上(如图2), $\overrightarrow{BA_1}/\!/\overrightarrow{BA}$结合定理2知$\overrightarrow{BA_1}=(k-0)\overrightarrow{BA}+0\cdot\overrightarrow{BC}=k\cdot\overrightarrow{BA}$, 则$\overrightarrow{A_1A}=(1-k)\overrightarrow{BA}$, $\therefore\ S_{\triangle ABC}:S_{\triangle AOC}=1:|1-k|=|m+n+r|:|n|$.

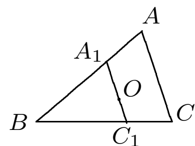


图 2

事实上, 以上证明中有些情况并未说明, 如果$n=0$, 那么最后比值无意义.

命题1: 若$m\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}+r\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 则$O$点在$\triangle ABC$内部的充要条件是$m$、$n$、$r$同号.

分析: 若O点在$\triangle ABC$内部, 如图2, 过O点作$A_1C_1/\!/AC$, $\overrightarrow{BA_1}$与$\overrightarrow{BA}$同向, 记$\overrightarrow{BA_1}=k\cdot\overrightarrow{BA}\,(0<k<1)$. 显然$O$内分$A_1C_1$, 令$\overrightarrow{A_1O}=\lambda\cdot\overrightarrow{OC_1}$, 则$\lambda>0$,

又因$\overrightarrow{BO}=\dfrac{\overrightarrow{BA_1}+\lambda\overrightarrow{BC_1}}{1+\lambda}=\dfrac{k}{1+\lambda}\cdot\overrightarrow{BA}+\dfrac{\lambda k}{1+\lambda}\cdot\overrightarrow{BC}$, 变形得$\dfrac{k}{1+\lambda}\cdot\overrightarrow{OA}+(1-k)\cdot\overrightarrow{OB}+\dfrac{\lambda k}{1+\lambda}\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$,

因$\dfrac{k}{1+\lambda}$, $1-k$, $\dfrac{\lambda k}{1+\lambda}$都为正数, 令$m=p\cdot\dfrac{k}{1+\lambda}$, $n=p(1-k)$, $r=p\cdot\dfrac{\lambda k}{1+\lambda}$ (p为非零实数), 则m、n、r都为正数或都为负数.

充分性留给读者.

为了更好地推广, 应考虑O点在平面ABC上的情况. 显然, O点在直线AB、BC或CA上时较简单, 以下暂不考虑.

命题2: 设点O在$\triangle ABC$外部且不在三边所在的直线上, 若$m\cdot\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}+r\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 则$m$、$n$、$r$中两正一负或两负一正且$m+n+r\neq 0$.

证明: 如图3, 不妨设O点在$\angle BAC$内部, 过O作$B_1C_1/\!/BC$分别交AB、AC的延长线于B_1、C_1, 记$\overrightarrow{AB_1}=k\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC_1}=k\cdot\overrightarrow{AC}$, 则$k>1$, 设$O$内分$\overrightarrow{B_1C_1}$所成的比为$\lambda\,(\lambda>0)$, 则$\overrightarrow{AO}=\dfrac{\overrightarrow{AB_1}+\lambda\cdot\overrightarrow{AC_1}}{1+\lambda}=\dfrac{k}{1+\lambda}\cdot\overrightarrow{AB}+\dfrac{k\lambda}{1+\lambda}\cdot\overrightarrow{AC}$, 变形得$\dfrac{k}{1+\lambda}\cdot\overrightarrow{OB}+\dfrac{k\lambda}{1+\lambda}\cdot\overrightarrow{OC}+(1-k)\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{0}$, 因$1-k<0$, $\dfrac{k}{1+\lambda}>0$, $\dfrac{k\lambda}{1+\lambda}>0$, 则令$m=p(1-k)$, $n=p\cdot\dfrac{k}{1+\lambda}$, $r=p\cdot\dfrac{k\lambda}{1+\lambda}$ (p为非零实数), 则m、n、r中两正一负或两负一正, 并且有$m+n+r=p\neq 0$.

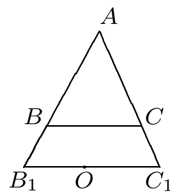


图 3

推广2: 设O点在平面ABC上且不在三边所在的直线上, 若$m\cdot\overrightarrow{OA}+n\cdot\overrightarrow{OB}+r\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$, 则$S_{\triangle ABC}:S_{\triangle AOC}:S_{\triangle COB}:S_{\triangle AOB}=|m+n+r|:|n|:|m|:|r|$.

证明: 仿推广1易证.

(下转第12–46页)

品味光学原理与数学的交汇

438800 湖北省团风中学 蔡军喜 438300 湖北省麻城市闫河中学 邹 峰

随着课程改革的不断推进和教学改革的不断深入, 作为工具性学科的数学与其他学科的联系将更为密切, 数学知识与其他知识的交叉整合将是一个十分重要的研究课题. 其中以光学原理为背景的试题就如一道亮丽的风景"闪亮登场". 本文例举高考及各地模拟试题中数学知识与光学原理的交汇命题, 供赏析.

一、与立体几何的交汇

例1 (2005年黄冈考题) 如图1所示的雕塑组合: 基座是棱长为2 m的正方体, 基座上面中心位置安放着一个大球, 阳光从A面正前方照下时, 基座在B面正前方地面的影子长是4.8m. 此时大球影子最远点伸到距B面8.8m处, 试求大球体积.

解析: (如图2) 以其中一条入射光线作出截面图, 设球半径为r, P点到球顶的距离$PN = s$, 则有 $\triangle PO_2M \backsim \triangle FCD$,

$\therefore\ \dfrac{s+2r+2}{2}=\dfrac{9.8}{4.8}$,

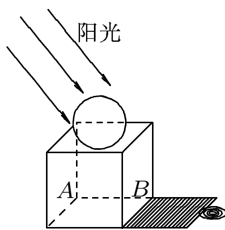


图 1

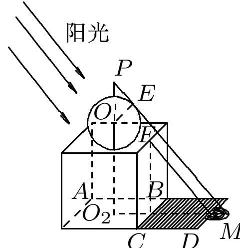


图 2

同理 $\triangle POE \backsim \triangle FCD$,

$\dfrac{r}{4.8}=\dfrac{r+s}{\sqrt{4.8^2+2^2}}=\dfrac{r+s}{5.2}$,

解得 $r=1(\mathrm{m})$, $\therefore\ V=\dfrac{4}{3}\pi(\mathrm{m}^3)$.

评析: 此题巧妙地将光学原理与立体几何及平面几何的知识相结合. 正确作出截面图建立比例关系是关键. 同时, 通过此题的学习, 我们还可提炼出测量如此实际情景的可行方法.

二、与解析几何的交汇

例2 在一种电影放映机的放映灯泡的玻璃上镀铝, 只留下一个透明窗用作通光孔, 它的反射面是一种曲线旋转而成的曲面的一部分, 灯丝定在某个地方发出光线反射到卡门上, 并且这两物体间距离为4.5cm, 灯丝距顶面距离为2.8cm. 为使卡门处获得最强烈的光线, 在加工这种灯泡时, 应使用何种曲线可使效果最佳? 试求这个曲线方程.

解析: 如图3, 由题意, 这种曲面应使光线聚于卡门上, 故这种曲线为椭圆, 灯丝与卡门恰好为椭圆的两个焦点. 故$2c=4.5$, 又灯丝与顶面距离即为$a-c=2.8$, 解得$a=5.05$, $c=2.25$, 故$b=4.52$.

$\therefore$ 这个曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{5.05^2}+\dfrac{y^2}{4.52^2}=1$.

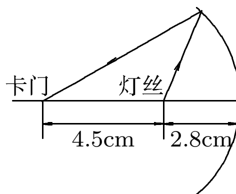


图 3

评析: 熟悉此题的背景, 了解圆锥曲线的光学性质, 是解决本题的基础(见人教版试验修订本. 高二(上)圆锥曲线阅读材料), 同时本题也体现了光学性质在实际生活中的应用价值.

例3 (2003年全国考题) 已知长方形的四个顶点$A(0,0)$、$B(2,0)$、$C(2,1)$和$D(0,1)$, 一光线从AB的中点P_0沿与AB夹角为θ的方向($\angle P_1P_0B=\theta$)射到 BC上的点P_1后, 依次反射到CD、DA和AB上的点P_2、P_3和P_4(入射角等于反射角). 设P_4的坐标为$(x_4,0)$, 若$1<x_4<2$, 则$\tan\theta$的取值范围是 ··········( )

(A) $\left(\frac{1}{3},1\right)$; (B) $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$;

(C) $\left(\frac{2}{5},\frac{1}{2}\right)$; (D) $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{3}\right)$.

解析: 如图4, 此题如果计算P_1、P_2、P_3、P_4的坐标, 繁而耗时, 特别是在考试时, 尤不可取. 注意到光线反射过程中入射角等于反射角, 利用对称性易得$\tan\theta=\frac{2}{3+x_4}$, 故选C.

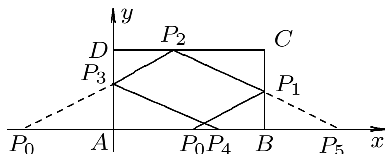


图 4

评析: 光线反射常常与对称联系较紧密, 在解题中要注意灵活利用这一特征.

三、与函数、导数的交汇

例4 (2005年浙江考题) 家里餐厅桌上方安装一拉杆吊灯, 可根据不同需要调节灯与饭桌的距离, 要想使桌子边缘的照度最大, 灯应怎样调节?

解析: 如图5, 根据光学原理, 照度y与$\sin\phi$成正比, 与r^2成反比. 即$y=k\frac{\sin\phi}{r^2}$ (k是与灯光强度有关的常数) 要求圆桌边缘的照度最大, 即求y的最大值.

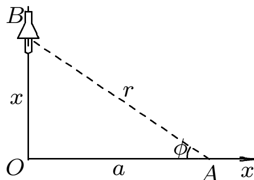


图 5

设O到A、B的距离分别为a、x, 则

$$y=k\frac{\sin\phi}{r^2}=k\frac{x}{r(x^2+a^2)}$$

$$=k\frac{x}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\quad(x\geqslant 0),$$

$\therefore\ y'=k\frac{a^2-2x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{5}{2}}}$, 令$y'=0$, 则$a^2-2x^2=0$的根为$x_1=-\frac{a}{\sqrt{2}}$ (舍), $x_2=\frac{a}{\sqrt{2}}$.

在$(0,+\infty)$内可得: 当$x\in\left(0,\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$时, $y'>0$, $y=k\frac{\sin\phi}{r^2}$为增函数.

当$x\in\left(\frac{a}{\sqrt{2}},+\infty\right)$时,

$y'<0$, $y=k\frac{\sin\phi}{r^2}$为减函数.

$\therefore\ y=f(x)$在$x=\frac{a}{\sqrt{2}}$时取极大值, 即最大值.

若圆桌半径$a=50\,\text{cm}$时, 电灯距圆桌约$3.5\,\text{cm}$时圆桌边缘照度最大.

评析: 本题以生活实例为背景, 不仅考查了知识的交汇, 还拓展了建模能力. 本题还可建立ϕ的三角函数关系, 利用不等式求解.

四、与数列、极限的交汇

例5 (2005年江西考题) 从A点出发的一条光线在AD与CD之间反射了n次后, 垂直地射到B点 (该点可能在AD上, 也可能在CD上), 然后按原路返回点A, 图6是$n=4$时的光路图, 若$\angle CDA=8^\circ$, 则n的最大值是 ( )

(A) 9; (B) 10; (C) 11; (D) 12.

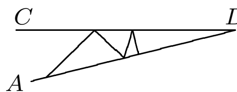


图 6

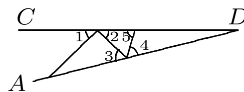


图 7

解析: 如图7, 设$\angle 1=\alpha$, 则$\angle 2=\alpha$,

$\angle 3=\angle 4=\alpha+8^\circ$,

同样地, $\angle 5=\angle 4+8^\circ=\angle 3+8^\circ$.

一般地, $\angle(2n+1)=\angle(2n-1)+8^\circ$, $\therefore\ \angle(2n-1)$是以α为首项, 8°为公差的等差数列, $\therefore\ \angle(2n-1)=\alpha+(n-1)8^\circ$, 当$\angle(2n-1)=90^\circ$时$n$最大, 即$\alpha+(n-1)8^\circ=90^\circ\Longrightarrow n=\frac{90^\circ-\alpha}{8^\circ}+1\leqslant\frac{90^\circ}{8^\circ}+1$,

$\therefore\ n$的最大值为12.

五、与三角、不等式的交汇

例6 (2004年石家庄考题) 一形状为等边三角形的反射面, 设其顶点为A、B、C, 一光线从AB边的中点D射出, 反射到BC边上的某点E, 并且依次反射到CA于点F, AB边于点G, 设$\angle BDE=\theta$, 求θ的取值范围.

解析: 如图8, 由$\triangle ABC$为等边三角形及入射角等于反射角易见:

$\triangle BDE \backsim \triangle CFE \backsim \triangle AFG$,

$\therefore \dfrac{BE}{DB}=\dfrac{CE}{FC}=\dfrac{AG}{FA}$.

不失一般性, 设等边三角形ABC的边长为2, 且$BE=k$, 则有$DB=1$, 且

$$\begin{cases} 0<BE=k<2, \\ 0<EC=2-k<2, \\ 0<CF=\dfrac{2-k}{k}<2, \\ 0<FA=\dfrac{3k-2}{k}<2, \\ 0<AG=3k-2<2, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 0<k<2, \\ \dfrac{2}{3}<k<2, \\ \dfrac{2}{3}<k<\dfrac{4}{3}, \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{2}{3}<k<\dfrac{4}{3}.$$

在$\triangle BDE$中,

由正弦定理得 $\dfrac{BE}{\sin\theta}=\dfrac{DB}{\sin(120^\circ-\theta)}$,

$\therefore \dfrac{1}{k}=\dfrac{\sin(120^\circ-\theta)}{\sin\theta}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cot\theta+\dfrac{1}{2}$,

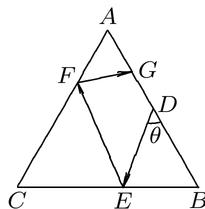


图 8

而$\dfrac{3}{4}<\dfrac{1}{k}<\dfrac{3}{2}$, $\therefore \dfrac{\sqrt{3}}{6}<\cot\theta<\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$,

即$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\tan\theta<2\sqrt{3}$,

$\therefore \arctan\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\theta<\arctan 2\sqrt{3}$.

评析: 本题的解法不唯一, 但都要用到正弦定理及光学的反射定理.

以光学原理为背景引入数学问题值得关注. 数学是众多学科的工具, 数学进入某一学科, 就意味着这门学科从定性阶段发展到定量阶段, 也就意味着这门学科的成熟. 数学已成为现代各门学科中不可缺少的工具, 要使各学科的研究有所作为, 必须具备良好的数学素养, 必须善于把所研究的问题转化为数学问题, 利用数学工具来加以解决. 所以在学生的学习中也要注意数学和其他学科的沟通.

(上接第12-2页)

所以$\angle ABC$与$\angle DFE$是互余的.

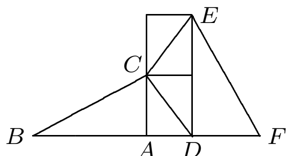


图 6

以上三种思考过程都属于非形式化论证, 从箭头到文字语言, 为下阶段的严格论证奠定基础.

综上所述, 几何课程具有非常丰富的内涵, 各种几何即直观几何、实验几何、论证几何、变换几何、射影几何、解析几何并不是孤立存在的, 是有联系的. 在初中阶段各种几何之间如何相互融合、相互渗透以及融合、渗透到什么程度是一个值得深入研究的问题.

参考文献:

[1] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 上海教育出版社. 1995.

[2] 綦春霞. 数学课程论与数学课程教材改革[M]. 北京师范大学出版社. 2001.

[3] 孙晓天、张丹. 新课程理念与初中数学课程改革[M]. 东北师范大学出版社. 2002.

[4] 课程标准研制组. 数学课程标准解读[M]. 北京师范大学出版社. 2002年5月.

[5] 郑毓信. 数学教育:从理论到实践. 上海教育出版社. 2001.

[6] 赵临龙. 用现代统一思想方法促进欧氏几何现代化[J]. 数学教育学报. 1997年11月.

[7] 鲍建生. 几何的教育价值与课程目标体系[J]. 教育研究. 2000年4月.

[8] 郑毓信. 数学教育的现代发展. 江苏教育出版社. 1999年.

2005年高考创新题的常见类型及方法解析

421600 湖南省祁东县育贤中学 黄爱民 湖南省祁东县第一中学 陈铁军

纵览2005年全国各地高考数学试卷, 今年高考创新题无论是形式的设计, 还是内容的讲究, 都会给人面目一新之感. 下面举例谈谈这类问题的常见类型及方法.

一、语言转化型

例1 (2005年高考辽宁卷第16题) ω是正实数, 设$S_\omega=\{\theta|f(x)=\cos[\omega(x+\theta)]$是奇函数$\}$, 若对每个实数$a$, $S_\omega\cap(a,a+1)$的元素不超过2个, 且有a, 使$S_\omega\cap(a,a+1)$含2个元素, 则ω的取值范围________.

分析: 本题主要考查用集合的概念解决相关数学问题的能力. 在考查函数特别是三角函数的有关性质时, 具有一定的创新意识, 给人一种新鲜感. 因此, 具有一定的难度.

解: 由$f(x)=\cos[\omega(x+\theta)]$是奇函数知,

$f(x)=\cos(\omega x+\omega\theta)$是奇函数$\Longleftrightarrow \omega\theta=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$即$\theta=\dfrac{k\pi+\frac{\pi}{2}}{\omega}\ (k\in\mathbf{Z})$,

$S_\omega\cap(a,a+1)\neq\varnothing$且$S_\omega\cap(a,a+1)$的元素不超过2个, 则

$$a<\theta=\frac{k\pi+\frac{\pi}{2}}{\omega}<a+1$$
$$\Longrightarrow a\omega<k\pi+\frac{\pi}{2}<(a+1)\omega$$
$$\Longrightarrow \frac{a\omega-\frac{\pi}{2}}{\pi}<k<\frac{(a+1)\omega-\frac{\pi}{2}}{\pi}, \quad (*)$$

从而知, 满足$(*)$的k值不超过2个且存在这样的实数a使得k值有2解, 又$\because k\in\mathbf{Z}$,

$\therefore$ 区间$\left(\dfrac{a\omega-\frac{\pi}{2}}{\pi},\dfrac{(a+1)\omega-\frac{\pi}{2}}{\pi}\right)$的长度不超过2, 则有$\dfrac{(a+1)\omega-\frac{\pi}{2}}{\pi}-\dfrac{a\omega-\frac{\pi}{2}}{\pi}=\dfrac{\omega}{\pi}\in(1,2]$,

即$\pi<\omega\leqslant 2\pi$.

评注: 本题比较新颖地将集合语言与三角函数的性质结合在一起来探求不等式有解的条件. 抓住整数k与θ的对应关系来建立目标不等式是解决问题的关键. 方法巧妙, 值得欣赏.

二、图象变换型

例2 (2005年高考江西(理)卷第7题) 设$y=xf'(x)$的图象如图1所示(其中$f'(x)$是$f(x)$函数的导函数). 下面四个图象中$y=f(x)$的图象大致是……………………………( )

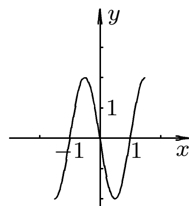
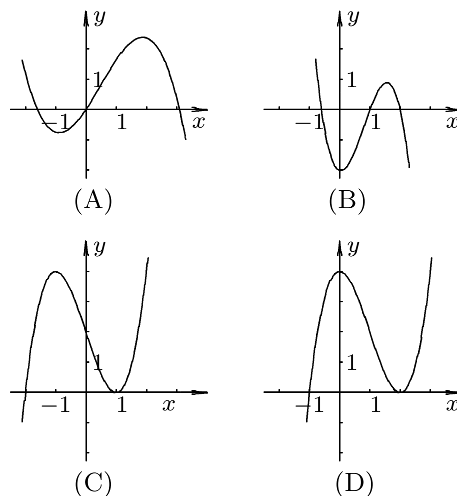


图 1



解析: 由$y=xf'(x)$的图象知

$f'(-1)=f'(1)=0$,

当$-1<x<0$或$x>1$时, $xf'(x)>0$,

故当$-1 < x < 0$时, $f'(x) < 0$, 当$x > 1$时, $f'(x) > 0$;

当$0 < x < 1$或$x < -1$时, $xf'(x) < 0$, 故当$0 < x < 1$时, $f'(x) < 0$, 当$x < -1$时, $f'(x) > 0$.

从而知函数$y = f(x)$在$x = -1$和1时取得极值. 当$x < -1$或$x > 1$时, 函数$y = f(x)$为增函数, 当$-1 < x < 0$或$0 < x < 1$时, $y = f(x)$为减函数, 故正解选项为C.

评注: 本题较好地考查导函数与原函数之间的图象关系, 在图象考查上有创新意识, 具有较强的综合性.

三、规律发现型

例3 (2005年高考上海(理)第12题(文)第16题)用n个不同的实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$可得到$n!$个不同的排列, 每个排列为一行写成一个$n!$行的数阵. 对第i行$a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}$, 记$b_i = -a_{i1} + 2a_{i2} - 3a_{i3} + \cdots + (-1)^n na_{in}$, $i = 1, 2, 3, \cdots, n!$, 例如:用1, 2, 3可得数阵如下图, 由于此数阵中每一列各数之和都是12, 所以$b_1 + b_2 + \cdots + b_6 = -12 + 2 \times 12 - 3 \times 12 = -24$, 那么, 在用1, 2, 3, 4, 5形成的数阵中, $b_1 + b_2 + \cdots + b_{120} =$________.

1	2	3
1	3	2
2	1	3
2	3	1
3	1	2
3	2	1

解析: 由题中实例不难发现: (1) 此数阵中每一列各数之和都是$A_2^2(1+2+3) = 12$; (2) $b_1 + b_2 + \cdots + b_6$其求和特点是数字1, 2, 3分别与每列各数之和12之积正负相加得到. 于是用1, 2, 3, 4, 5形成的数阵中, 此数阵中每一列各数之和都是$A_4^4(1+2+3+4+5) = 360$, 所以

$b_1 + b_2 + \cdots + b_{120} = -360 + 2 \times 360 - 3 \times 360 + 4 \times 360 - 5 \times 360 = 360(-1 + 2 - 3 + 4 - 5) = -1080$.

评注:本题实为信息给予创新题,求解关键是要善于捕捉题目中的有效信息, 在考查特例的基础上, 总结出一般性规律, 进而用等差数列有关性质解决. 形式较为新颖.

四、实践操作型

例4 (2005年高考上海(理)第11题(文)第12题)如图2, 有两个相同的直三棱柱, 高为$\frac{2}{a}$, 底面三角形的三边长分别为$3a$、$4a$、$5a$ $(a > 0)$. 用它们拼成一个三棱柱或四棱柱, 在所有可能的情形中, 全面积最小的是一个四棱柱, 则a的取值范围是________.

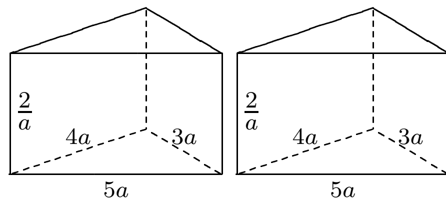


图 2

解析:先考虑拼成三棱柱的全面积:

(1) 如图3, $S_1 = 2 \times \frac{1}{2} \times 4a \times 3a + (3a + 4a + 5a) \times \frac{4}{a} = 12a^2 + 48$.

(2) 如图4, 若$AC = 5a$, $AB = 4a$, $BC = 3a$, 则该三棱柱的全面积为$S_1 = 4 \times \frac{1}{2} \times 4a \times 3a + 2 \times (3a + 5a) \times \frac{2}{a} = 24a^2 + 32$.

(3) 如图4, 若$AC = 5a$, $AB = 3a$, $BC = 4a$, 则该三棱柱的全面积为$S_1 = 4 \times \frac{1}{2} \times 4a \times 3a + 2 \times (4a + 5a) \times \frac{2}{a} = 24a^2 + 36$.

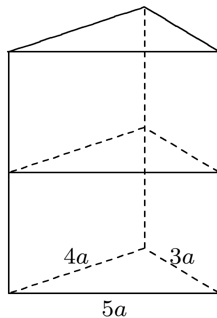


图 3

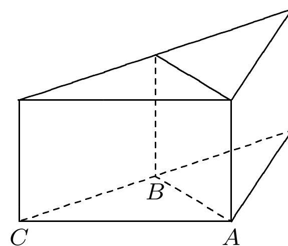


图 4

再考虑拼成四棱柱(如图5)的全面积:

(1) 若$AC = 5a$, $AB = 4a$, $BC = 3a$, 则该四棱柱的全面积为$S_2 = 2 \times 4a \times 3a + 2(3a + 4a) \times \frac{2}{a} = 24a^2 + 28$.

(2) 若 $AC = 4a$, $AB = 3a$, $BC = 5a$, 则该四棱柱的全面积为 $S_2 = 2\times 4a\times 3a + 2(3a+5a)\times\dfrac{2}{a} = 24a^2+32$.

(3) 若 $AC = 3a$, $AB = 5a$, $BC = 4a$, 则该四棱柱的全面积为 $S_2 = 2\times 4a\times 3a + 2(4a+5a)\times\dfrac{2}{a} = 24a^2+36$.

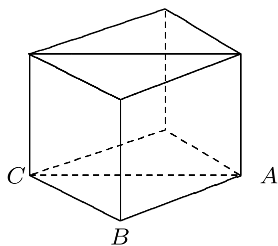


图 5

又在所有可能的情形中, 全面积最小的是一个四棱柱, 从而知

$24a^2+28 < 12a^2+48 \Longrightarrow 12a^2 < 20 \Longrightarrow 0 < a < \dfrac{\sqrt{15}}{3}$. 即 a 的取值范围是 $\left(0, \dfrac{\sqrt{15}}{3}\right)$.

评注: 本题设计较新颖, 考查学生动手操作能力及其全面分析和解决问题的能力. 值得提出的是许多考生在得出所有可能的情形后, 认为"所有可能的四棱柱的全面积最大值小于三棱柱的全面积"导致错解.

五、条件探求型

例5 (2005年高考上海(理)第21题)对定义域分别为 D_f、D_g 的函数 $y = f(x)$、$y = g(x)$, 规定: 函数

$$h(x)=\begin{cases} f(x)\cdot g(x) & \text{当}\, x\in D_f\,\text{且}\, x\in D_g \\ f(x) & \text{当}\, x\in D_f\,\text{且}\, x\notin D_g \\ g(x) & \text{当}\, x\notin D_f\,\text{且}\, x\in D_g. \end{cases}$$

(1) 若函数 $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = x^2$, 写出函数 $h(x)$ 的解析式;

(2) 求问题 (1) 中函数 $h(x)$ 的值域;

(3) 若 $g(x) = f(x+\alpha)$, 其中 α 为常数, 且 $\alpha\in[0,\pi]$, 请设计一个定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y = f(x)$, 及一个 α 的值, 使得 $h(x) = \cos 4x$, 并予以证明.

解析: (1) 根据题设中的定义知:

函数 $y = f(x)$、$y = g(x)$ 的定义域分别为 $D_f = (-\infty,1)\cup(1,+\infty)$, $D_g = \mathbf{R}$, $D_f\cap D_g = D_f$, 于是

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x-1} & \text{当}\, x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty), \\ 1 & \text{当}\, x = 1. \end{cases}$$

(2) 当 $x\neq 1$ 时,

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{x^2}{x-1} = \frac{x^2-1+1}{x-1} \\ &= x+1+\frac{1}{x-1} \\ &= x-1+\frac{1}{x-1}+2. \end{aligned}$$

若 $x > 1$ 时, $h(x)\geqslant 4$, 当且仅当 $x = 2$ 时等号成立;

若 $x < 1$ 时, $h(x) = -\left[1-x+\dfrac{1}{1-x}\right]+2\leqslant 0$, 当且仅当 $x = 0$ 时等号成立.

$\therefore$ 函数 $h(x)$ 的值域为

$(-\infty,0]\cup\{1\}\cup[4,+\infty)$.

(3) 令 $f(x) = \sin 2x+\cos 2x$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$, 则

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x+\alpha) \\ &= \sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right) \\ &= \cos 2x-\sin 2x, \end{aligned}$$

于是 $h(x) = f(x)g(x) = f(x)f(x+\alpha) = (\cos 2x+\sin 2x)(\cos 2x-\sin 2x) = \cos 4x$.

本题解还可令 $f(x) = 1+\sqrt{2}\sin 2x$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. 证明略.

评注: 本题第 (1) 小题属于定义给予创新题, 解决这一创新题的关键是弄清定义的本质. 只要理解了这一给予的新定义, 再做不难. 第 (3) 小题属于条件探索型创新题, 从三角函数的有关性质出发, 适当赋值, 反复尝试是求解的关键.

六、阅读理解型

例6 已知 n 次多项式 $P_n = a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$, 如果在一种算法中, 计算 x_0^k $(k = 2, 3, 4, \cdots, n)$ 的值需要 $k-1$ 次乘法, 计算 $P_3(x_0)$ 的值共需要9次运算(6次乘法, 3次加法), 那么计算 $P_n(x_0)$ 的值共需要______次运算.

下面给出一种减少运算次数的算法: $P_0(x)$

$= a_0$, $P_{k+1}(x) = xP_k(x) + a_{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$, 利用该算法, 计算$P_3(x_0)$的值共需要6次运算, 那么计算$P_n(x_0)$的值共需要______次运算.

解析: 第(1)小题可从特例出发, 寻求解题规律. 计算$P_3(x_0) = a_0x_0^3 + a_1x_0^2 + a_2x_0 + a_3$的值. 其中乘法运算次数为: $a_0x_0^3$ 3次, $a_1x_0^2$ 2次, a_2x_0 1次, 然后再进行3次加法, 共需要9次运算. 这样就不难得到: 计算$P_n(x_0) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n$的值, 需要进行乘法运算的次数为: $n + (n-1) + \cdots + 1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$次, 进行加法运算的次数为$n$次, 从而计算$P_n(x_0)$的值共需要$\dfrac{n(n+1)}{2} + n = \dfrac{1}{2}n(n+3)$次运算.

第(2)小题由$P_{k+1}(x) = xP_k(x) + a_{k+1}$ $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$知, $P_{k+1}(x_0)$需要运算次数是在$P_k(x_0)$运算的次数的基础上还要进行2次运算. 不妨设$P_0(x_0)$, $P_1(x_0)$, $P_2(x_0)$, $\cdots$, $P_n(x_0)$需要运算的次数依次记为: b_0, b_1, b_2, $\cdots$, b_n,

$\because$ $b_0 = 0$, $b_1 = 2$, $b_n = b_{n-1} + 2$, 即$b_n - b_{n-1} = 2$, $\therefore$ $\{b_n\}$是公差为2的等差数列, 于是得到$b_n = 2n$.

评注: 本题是以新课标教材"算法"有关内容为基础设计的, 体现出浓浓的教改气息.

本题第(1)小题利用"特殊到一般", "归纳、猜想"的思维方式使问题得以解决; 第(2)小题通过递推关系, 将问题转化为等差数列求解. 题目设计新颖, 可读性强.

七、探索存在型

例7 (2005年高考北京(理)第20题) 设$f(x)$是定义在$[0,1]$上的函数, 若存在$x^* \in (0,1)$, 使得$f(x)$在$[0,x^*]$上单调递增, 在$[x^*,1]$上单调递减, 则称$f(x)$在$[0,1]$上的单峰函数. x^*为峰点, 包含峰点的区间为含峰区间. 对任意的$[0,1]$上的单峰函数$f(x)$, 下面研究缩短其含峰区间长度的方法.

(I) 证明: 对任意的x_1、$x_2 \in (0,1)$, $x_1 < x_2$, 若$f(x_1) \geqslant f(x_2)$, 则$(0,x_2)$为含峰区间; 若$f(x_1) \leqslant f(x_2)$, 则$(x_1,1)$为含峰区间;

(Ⅱ) 对给定的r $(0 < r < 0.5)$, 证明: 存在x_1、$x_2 \in (0,1)$, 满足$x_2 - x_1 \geqslant 2r$, 使得由(I)所确定的含峰区间的长度不大于$0.5 + r$;

(Ⅲ) 选取x_1、$x_2 \in (0,1)$, $x_1 < x_2$, 由(I)可确定含峰区间为$(0,x_2)$或$(x_1,1)$, 在所得的含峰区间内选取x_3, 由x_3与x_1或x_3与x_2类似地可确定一个新的含峰区间. 在第一次确定的含峰区间为$(0,x_2)$的情况下, 试确定x_1、x_2、x_3的值, 满足两两之差的绝对值不小于0.02, 且使得新的含峰区间的长度缩短了0.34 (区间长度等于区间的右端点与左端点之差).

解析: (I) 证: 设x^*为$f(x)$的峰点, 则由单峰函数定义知, $f(x)$在$[0,x^*]$上单调递增, 在$[x^*,1]$上单调递减.

当$f(x_1) \geqslant f(x_2)$时, 假设$x^* \notin (0,x_2)$, 则$x_1 < x_2 \leqslant x^*$, 从而$f(x^*) \geqslant f(x_2) > f(x_1)$, 这与$f(x_1) \geqslant f(x_2)$矛盾, 所以$x^* \in (0,x_2)$, 即$(0,x_2)$是含峰区间; 当$f(x_1) \leqslant f(x_2)$时, 假设$x^* \notin (x_1,1)$, 则$x^* \leqslant x_1 < x_2$, 从而$f(x^*) \geqslant f(x_1) > f(x_2)$, 这与$f(x_1) \leqslant f(x_2)$矛盾, 所以$x^* \in (x_1,1)$, 即$(x_1,1)$是含峰区间.

(Ⅱ) 证明: 由(I)的结论知:

当$f(x_1) \geqslant f(x_2)$, 含峰区间的长度为$l_1 = x_2$; 当$f(x_1) \leqslant f(x_2)$, 含峰区间的长度为$l_2 = 1 - x_1$. 对于上述两种情况由题意得:

$$\begin{cases} x_2 \leqslant 0.5 + r, \\ 1 - x_1 \leqslant 0.5 + r. \end{cases} \quad ①$$

由①得$1 + x_2 - x_1 \leqslant 1 + 2r$, 即$x_2 - x_1 \leqslant 2r$, 又$\because$ $x_2 - x_1 \geqslant 2r$, $\therefore$ $x_2 - x_1 = 2r$. ②

将②代入①得

$x_1 \leqslant 0.5 - r$, $x_2 \geqslant 0.5 + r$. ③

由①和③解得$x_1 = 0.5 - r$, $x_2 = 0.5 + r$, $\therefore$ 这时含峰区间的长度$l_1 = l_2 = 0.5 + r$. 存在x_1、$x_2 \in (0,1)$, 满足$x_2 - x_1 \geqslant 2r$, 使得所确定的含峰区间的长度不大于$0.5 + r$.

(Ⅲ) 解: 对先选取的x_1、x_2, $x_1 < x_2$, 由(Ⅱ)可知$x_1 + x_2 = 1$. ④

在第一次确定的含峰区间为$(0,x_2)$的情况下, x_3的取值应满足$x_3 + x_1 = x_2$. ⑤

由④与⑤可得$\begin{cases} x_2 = 1 - x_1, \\ x_3 = 1 - 2x_1, \end{cases}$ 当$x_1 > x_3$时, 含峰区间的长度为x_1. 由条件$x_1 - x_3 \geqslant 0.02$, 得$x_1 - (1 - 2x_1) \geqslant 0.02$, 从而$x_1 \geqslant 0.34$. 因此, 为了含峰区间的长度缩短到0.34, 只要取$x_1 = 0.34$, $x_2 = 0.66$, $x_3 = 0.32$.

评注: 理解含峰区间的定义, 可借助三角函数$y = \sin x$实现抽象问题具体化, 第(Ⅱ)、(Ⅲ)小题存在性问题的证明与求解体现了高等数学数值分析中"逼近"思想的运用, 背景较深, 能力要求较高, 是今年高考中较难的一道创新试题.

八、定义给予型

例8 (2005年高考湖南(理)第15题) 函数$y = f(x)$的图象与直线$x = a$, $x = b$及x轴所围成图形的面积称为函数$f(x)$在$[a, b]$上的面积. 已知函数$y = \sin nx$在$\left[0, \dfrac{\pi}{n}\right]$上的面积为$\dfrac{2}{n}\,(n \in \mathbf{N}^*)$, 则

(i) 函数$y = \sin 3x$在$\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$上的面积为______;

(ii) 函数$y = \sin(3x - \pi) + 1$在$\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$上的面积为______.

解析: (i) 如图6, 由题设可知函数$y = \sin nx$在区间长度为半个周期上的面积为$\dfrac{2}{n}\,(n \in \mathbf{N}^*)$, 类似地可得:

函数$y = \sin 3x$在$\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ (区间长度也为半个周期) 上的面积为$\dfrac{2}{3}$;

由对称性知, 函数$y = \sin 3x$在$\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right]$ (区间长度为一个周期) 上的面积为$\dfrac{4}{3}$.

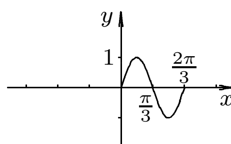


图 6

(ii) 函数$y = \sin(3x - \pi) + 1$的图象向左平移$\dfrac{\pi}{3}$个单位可得到$y = \sin 3x + 1$的图象, 由函数图象平移性质知:

函数$y = \sin(3x - \pi) + 1$在$\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$上的面积等于函数$y = \sin 3x + 1$在$[0, \pi]$上的面积; 而函数$y = \sin 3x + 1$在$[0, \pi]$上的面积等于函数$y = \sin 3x + 1$与直线$y = 1$围成的半个周期的面积与矩形的面积之和 (如图7阴影部分所示), 由第(i)小题知$y = \sin 3x + 1$与直线$y = 1$围成的半个周期的面积为$\dfrac{2}{3}$, 矩形的面积为$\pi \times 1 = \pi$, 从而知函数$y = \sin(3x - \pi) + 1$在$\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}\right]$上的面积为 $\pi + \dfrac{2}{3}$.

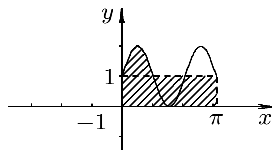


图 7

评注: 本题是新定义型信息给予题, 考查数形结合思想的应用. 只要弄清题意, 正确画出图形后直接写结果. 其实这道题蕴藏着高等数学的背景, 利用二重积分便可轻松求解.

总之, 高考创新题的出现, 不仅给整套试卷注入了新的血液, 而且为数学创新能力的培养与推广提供生动有趣的素材, 它将更加有效地推动了素质教育的全面开展.

(上接第12–38页)

说明: 以上定理1、2只是在平面向量的基础上前进一小步, 但其教学价值、应用价值凸现.

参考文献

[1] 李晟. 一道高中竞赛题的探讨与推广. 数学教学. 2005. 4.

[2] 袁利红. 从一道联赛试题所想到的. 中学数学. 2005. 5.

[3] 厉倩. 一道联赛题的推广. 中学生数学. 2005年5月上.

[4] 全日制普通高级中学教科书 (必修)《数学》第一册 (下) P.108~109. 人民教育出版社. 2003年.

⊙？⊙⊙⊙

数学问题与解答

2005年第10期问题解答

⊙⊙⊙！⊙

656. 在非直角$\triangle ABC$中, $AD\perp BC$, $BE\perp AC$, $CF\perp AB$, 垂足分别为D、E、F, 设$\triangle ABC$、$\triangle DEF$外接圆半径分别为R、R_0, 求证: $R=2R_0$.

证: 如图1, 对于锐角$\triangle ABC$, 设H为$\triangle ABC$的垂心. 由B、C、E、F四点共圆, 得$\angle AEF=\angle ABC$. $\therefore$ $\triangle AEF\backsim\triangle ABC$, $\dfrac{EF}{BC}=\dfrac{AE}{AB}$.

图1

在Rt$\triangle AEB$中, $AE=AB\cos\angle BAC$. $\therefore$ $EF=BC\cos\angle BAC$.

由点A、C、D、F, 点A、B、D、E共圆, 得$\angle BDF=\angle CDE=\angle BAC$, 即$\angle EDF=180^\circ-2\angle BAC$.

由正弦定理 $R=\dfrac{BC}{2\sin\angle BAC}$,

$R_0=\dfrac{EF}{2\sin\angle EDF}=\dfrac{EF}{2\sin(2\angle BAC)}=\dfrac{BC\cos\angle BAC}{4\sin\angle BAC\cdot\cos\angle BAC}=\dfrac{R}{2}$,

$\therefore$ $R=2R_0$.

对于钝角$\triangle ABC$的情形, 同理可证.

657. 已知互不相等的实数x、y、z满足$|xy+2|=\sqrt{1+(x+y)^2}$, $|xz+2|=\sqrt{1+(x+z)^2}$, 求证: $|yz+2|=\sqrt{1+(y+z)^2}$.

证: 由$|xy+2|=\sqrt{1+(x+y)^2}$平方并整理得 $(x^2-1)y^2+2xy+(3-x^2)=0$.

同理, $(x^2-1)z^2+2xz+(3-x^2)=0$.

由此可见, y、z是关于t的方程

$$(x^2-1)t^2+2xt+(3-x^2)=0$$

的两个不相等的实根 (这隐含$x^2\neq 1$, 且$\Delta=4x^2-4(x^2-1)(3-x^2)=(2x^2-3)^2+3>0$).

$\therefore$ $y+z=\dfrac{2x}{1-x^2}$, $yz=\dfrac{3-x^2}{x^2-1}$.

$\therefore$ $|yz+2|=\dfrac{x^2+1}{|1-x^2|}=\sqrt{1+(y+z)^2}$.

658. 已知α、β为锐角, 且$\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin 2\alpha}=\dfrac{\sin(2\beta+\alpha)}{\sin 2\beta}$, 求证: $\alpha=\beta$.

证: 由题设得 $\sin\alpha\cos\alpha\sin(2\beta+\alpha)-\sin\beta\cos\beta\sin(2\alpha+\beta)=0$.

$\therefore$ $\sin\alpha\cos\alpha\sin(2\beta+\alpha)-\sin\alpha\cos\beta\cdot\sin(2\beta+\alpha)+\sin\alpha\cos\beta\sin(2\beta+\alpha)-\sin\beta\cdot\cos\beta\sin(2\alpha+\beta)=0$,

$\sin\alpha\sin(2\beta+\alpha)(\cos\alpha-\cos\beta)+\cos\beta\cdot[\sin\alpha\sin(2\beta+\alpha)-\sin\beta\sin(2\alpha+\beta)]=0$,

$[\cos 2\beta-\cos(2\beta+2\alpha)](\cos\alpha-\cos\beta)+\cos\beta[\cos 2\beta-\cos(2\beta+2\alpha)-\cos 2\alpha+\cos(2\beta+2\alpha)]=0$,

$[2\cos^2\beta-1-2\cos^2(\alpha+\beta)+1](\cos\alpha-\cos\beta)+\cos\beta(2\cos^2\beta-1-2\cos^2\alpha+1)=0$,

$(\cos\alpha-\cos\beta)[\cos^2\beta-\cos^2(\alpha+\beta)-\cos\beta(\cos\alpha+\cos\beta)]=0$,

$(\cos\alpha-\cos\beta)[\cos^2(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos\beta]=0$.

$\because$ α、β为锐角，

$\therefore$ $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cos\beta>0$.

于是$\cos\alpha-\cos\beta=0$, $\alpha=\beta$.

659. 已知A_1、B_1、C_1分别在$\triangle ABC$的边BC、CA、AB上, 满足$\dfrac{BA_1}{A_1C}=\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{AC_1}{C_1B}=\lambda$, 记$BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, 设P为$\triangle ABC$所在平面内任一点, 求$PA_1^2+PB_1^2+PC_1^2$的最小值.

解: 由$\dfrac{BA_1}{A_1C}=\lambda$得 $\overrightarrow{PA_1}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{PB}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{PC}$.

同理 $\overrightarrow{PB_1}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{PC}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{PA}$,

$\overrightarrow{PC_1}=\dfrac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{PA}+\dfrac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{PB}$.

$\therefore$ $PA_1^2+PB_1^2+PC_1^2=\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PB_1}^2+\overrightarrow{PC_1}^2=\dfrac{1+\lambda^2}{(1+\lambda)^2}\left(\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2\right)+\dfrac{2\lambda}{(1+\lambda)^2}\left(\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\right)$.

而$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$

$$=\frac{\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2-\left(\overrightarrow{PB}-\overrightarrow{PC}\right)^2}{2}+\frac{\overrightarrow{PC}^2+\overrightarrow{PA}^2-\left(\overrightarrow{PC}-\overrightarrow{PA}\right)^2}{2}+\frac{\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2-\left(\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PB}\right)^2}{2}$$

$$=\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2-\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2),$$

$\therefore$ $\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PB_1}^2+\overrightarrow{PC_1}^2=\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2-\dfrac{\lambda}{(1+\lambda)^2}(a^2+b^2+c^2)$.

记$\triangle ABC$的重心为G, 则

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{PA}^2+\overrightarrow{PB}^2+\overrightarrow{PC}^2\\&=\left(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GA}\right)^2+\left(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GB}\right)^2+\left(\overrightarrow{PG}+\overrightarrow{GC}\right)^2\\&=3\overrightarrow{PG}^2+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2+2\overrightarrow{PG}\cdot\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)\\&=3\overrightarrow{PG}^2+\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2\\&\geqslant\overrightarrow{GA}^2+\overrightarrow{GB}^2+\overrightarrow{GC}^2=\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2).\end{aligned}$$

所以, 当P为 $\triangle ABC$重心时, $\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PB_1}^2+\overrightarrow{PC_1}^2$取到最小值

$$\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2)-\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}(a^2+b^2+c^2)=\frac{\lambda^2-\lambda+1}{3(1+\lambda)^2}(a^2+b^2+c^2).$$

660. 记$\sigma(n)=\sum\limits_{d|n}d$ (其中n、$d\in\mathbf{Z}^+$), 若$\sigma(n)=2n$, 则称n为完全数.

设$a=2^{p-1}(2^p-1)+1$, $b=2^{p-1}(2^p-1)-1$, 其中p为质数, 问a、b是否为完全数? 证明你的结论.

解: a、b都不是完全数.

若$p=2$, 则$a=7$, $b=5$, 都不是完全数.

若$p\geqslant3$, 则$p-1$为偶数, $2^{p-1}=4^{\frac{p-1}{2}}\equiv1\pmod 3$, 且$2^{p-1}\equiv0\pmod 4$.

(1) $a\equiv1\cdot[(-1)^p-1]+1\equiv-1\pmod 3$, a不是完全平方数.

若$d|a$, 则有$d\equiv\pm1\pmod 3$.

当$d\equiv1\pmod 3$时,

$\dfrac{a}{d}\equiv\dfrac{a}{d}\cdot d\equiv a\equiv-1\pmod 3$;

当$d\equiv-1\pmod 3$时,

$\dfrac{a}{d}\equiv\dfrac{a}{d}\cdot(-d)\equiv-a\equiv1\pmod 3$.

$\therefore$ $d+\dfrac{a}{d}\equiv0\pmod 3$.

故$\sigma(a)=\sum\limits_{d|a,d<\sqrt{a}}\left(d+\dfrac{a}{d}\right)\equiv0\pmod 3$, 又$2a\equiv-2\equiv1\pmod 3$.

$\therefore$ $\sigma(a)\neq2a$, 即a不是完全数.

(2) $b\equiv0-1\equiv-1\pmod 4$, b也不是完全平方数.

若$d|b$, 则$d\equiv\pm1\pmod 4$.

仿前可证$d+\dfrac{a}{d}\equiv0\pmod 4$.

$\therefore$ $\sigma(a)=\sum\limits_{d|b,d<\sqrt{b}}\left(d+\dfrac{a}{d}\right)\equiv0\pmod 4$, 又$2b\equiv-2\equiv2\pmod 4$,

$\therefore$ $\sigma(b)\neq2b$, 即b不是完全数.

2005 年第12 期问题

661. 如图2, 在正方形$ABCD$中, 对角线

AC与BD交于O, 点E_1、E_2在BC边上, 且$\angle BAE_1=\angle CAE_2$, AE_1、AE_2与OB分别交于点F_1、F_2, 求证:

$$\frac{OF_1}{CE_1}\cdot\frac{OF_2}{CE_2}=\frac{1}{4}.$$

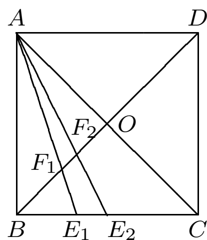


图 2

(北京　郭　璋供题)

662. 已知实数a、b、c满足$a^3+b^3+c^3=3$, 求证: $ab+bc+ca\leqslant 3$.

(浙江　李康海供题)

663. 已知$\{a_n\}$为正项等差数列, $n\in\mathbf{N}^+$且$n>1$, 求证:

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant\left(1+\frac{2}{a_1+a_2}\right)^n.$$

(安徽　盛宏礼供题)

664. 如图3, $\odot O$是$\mathrm{Rt}\triangle ABC$的内切圆, E、F分别是两条直角边AC、BC上的切点, 射线AO、BO交直线EF于N、M, 求证:

$$\frac{1}{5}<\frac{S_{\triangle OMN}}{S_{\triangle ABC}}<\frac{1}{4}.$$

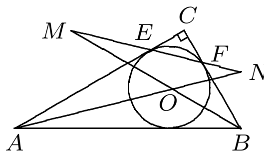


图 3

(安徽　黄全福供题)

665. 设$\triangle ABC$的内心为I, 延长AI、BI、CI分别交$\triangle ABC$的外接圆于A_1、B_1、C_1, 求证:

$$\frac{AA_1}{AC}+\frac{BB_1}{BA}+\frac{CC_1}{CB}\geqslant 2\sqrt{3}.$$

(浙江　苏炜杰供题)

(本栏目责任编辑　李大元　汪纯中)

(上接第12–19页)

一种重要的思想方法.

三、小结

回顾上面的讨论

① 我们研究了含递推关系的数列问题(二项递推, 多项递推), 其中迭加法、迭乘法是基本方法.

② 研究中我们看到, 数学思想丰富多彩(化归、类比、先猜后证······).

③ 刚才的研究还要我们能用哲学的眼光、数学的眼光来看问题, 即如何深入, 全面地观察, 如何追求简单是我们这节课的主旋律.

拉丁箴语讲得好: 简单是真的标志, 美是真理的光辉.

编者的话

本刊2005年所有刊登的文章均经作者本人确认没有一稿两投, 但遗憾的是其中仍有3篇文章属于一稿两投, 另有12篇稿件排版后发现为一稿两投而撤版. 另外, 本刊2005年第1期所刊登的《例说解函数最值题的思维策略》一文, 经调查为抄袭文章, 该文抄自1996年《高三数理化》第2–3期中贺信淳老师所写的《“思维受阻”怎么办?》一文. 本刊已对抄袭者提出了严厉批评. 事实上, 本刊2003年第11期的编后漫笔曾对“一稿两投”以及“抄袭”现象提出了批评. 在此, 本刊再一次重申严禁剽窃他人文章.

希望今后读者与编者共同努力, 力争杜绝“一稿多投”现象. 并欢迎广大读者加强监督.

编后漫笔

有关教育改革两则寓言

张奠宙　赵小平

新加坡李秉彝教授发来电子邮件, 告诉我一个真实故事, 同时也是一则关于数学教育改革的寓言. 说的是非洲有一个民族, 一向居住在一种木屋内, 晚上燃火照明. 后来, "欧洲人"来了. 告诉他们电灯比燃火照明要文明得多. 于是, 所有木屋都装上了电灯, 开始大家都说好. 但是一年之后, 所有木屋忽然都倒塌了.

原因何在? 原来每天燃火时会冒烟, 烟把各种昆虫赶出屋外. 现在使用电灯, 没有烟薰, 昆虫大量繁殖. 屋顶被昆虫蛀坏, 木屋轰然倒塌.

寓言告诉我们, 那个非洲民族的原来生活方式, 尽管原始, 却是十分和谐的. 电灯当然更为先进、文明. 但是引进先进的技术, 必须和原来的环境相适应. 要用好电灯, 则必须采取防虫、除虫措施. 不然, 好事会办成坏事.

正如电灯之于木屋, 西方的教育理念也许很先进, 但是未必都适合现代的中国. 至于西方的有些理念, 本来就未必十分科学, 我们更应该仔细分析, 有所选择. 目前在教育改革过程中, 这样盲目引进, 高速推广的理念, 后果堪虑.

另一则寓言取自李瑞环的《学哲学、用哲学》一书, 其中有一个故事是"老妇和茶山". 说的是老妇将一把用了多年的宜兴老茶壶到街上卖. 茶壶内有茶山(垢), 能够不放茶也有茶香. 开价5钱, 一买主愿出三两银子买下. 但身边未带钱, 嘱老妇等半个时辰后取钱来买. 老妇好心, 觉得买主肯出大价钱, 应该将茶壶用沙子把茶壶的里外都擦洗干净才好. 半个时辰之后, 那买主一看, 茶山已经没有了. 不要说3两银子, 连5钱银子也不愿买这把壶了.

有的传统文化象茶垢, 看上去其貌不扬, 贸然改掉, 损失很大. 例如中国的数学双基教育, 有些人很看不起, 往往将它和"死记硬背"、"重复演练"联系在一起. 可是一旦丢掉了这些优良传统, 中国的数学教育也就失去原来的价值了.

盲目引进国外教育理论, 丢弃自己的优良教育传统, 是很危险的.

(上接第12–34页)

当$\theta=\pi$时, $\lambda\in(0,1)$.

从而得到: 在平行四边形中, 若已知平行四边形的边长, 则两对角线长度的比值是一个任意的正数; 若已知平行四边形的内角θ, 则两对角线长度的比值是一个由θ确定的范围.

数学教学
SHU XUE JIAO XUE
2005年第12期
(总第219期)
主编: 张奠宙　赵小平
常务副主编: 忻重义
电　话: 021–62232712

主办单位: 华东师范大学
出　　版: 《数学教学》编辑部
邮政编码: 200062(上海中山北路3663号)
广告许可证: 沪工商广字07017号
印　　刷: 华东师范大学印刷厂
国内总发行: 上海市邮政局报刊发行局
国内订阅: 全国各邮电局
电子信箱: sxjxzz@math.ecnu.edu.cn

定价: 3.80元　国内统一刊号: CN31–1024/G4　每月12日出版　代号: 4–357